ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΡΓΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

«Φυσικοί Πόροι, Γεωπεριβάλλον και Γεωργική Μηχανική»

Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΗ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

της

ΜΑΡΙΑΣ Μ. ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΥ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2018

ΑΘΗΝΑ

Αφιερωμένη στην οικογένειά μου

ΜΑΙΡΗ ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Τμήμα Τμήματος Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων και Γεωργικής Μηχανικής

Αθήνα 23 Μαρτίου 2018

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ: Ιωάννης Παπαδοπεράκης

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Διονύσιος Καλύβας

Χαράλαμπος Χαρίτος

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της προσπάθειας, που για μένα ήταν καταλυτική, αφού με βοήθησε να ξεπεράσω το φόβο μου για τα μαθηματικά και μου άνοιξε νέους ορίζοντες στον τρόπο σκέψης μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσοι στάθηκαν αρωγοί και συμπαραστάτες μου.

Αρχικά τον επιβλέποντα της διατριβής μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Ιωάννη Παπαδοπεράκη, που με εμπιστεύτηκε αναθέτοντάς μου ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα και που με τις άοκνες προσπάθειές του με δίδαξε και με έκανε να κατανοήσω και να αγαπήσω τα «καθαρά» μαθηματικά.

Ενα ευχαριστώ είναι λίγο για το μέλος της Τριμελούς Επιτροπής της διατριβής Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Χαρίτο, που με επιμονή και υπομονή έθεσε τις βάσεις για την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής και με υποστήριξε σε όλα τα στάδιά της.

Ευχαριστώ επίσης το τρίτο μέλος της Τριμελούς Επιτροπής, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Διονύσιο Καλύβα για την υποστήριξη και τις διορθώσεις του.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω όλους τους Δασκάλους μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών, αφού ο καθένας με τον τρόπο του με βοήθησε να κατανοήσω καλύτερα τους φυσικούς μηχανισμούς και να διευρύνω το γνωσιακό μου επίπεδο καθώς και τα μέλη του Τμήματος Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων και Γεωργικής Μηχανικής που υποστήριξαν αυτή μου την προσπάθεια.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αιγαίου κ. Γεώργιο Τσαπόγα για τη βοήθειά του στην επιμέλεια της συγκεκριμένης διατριβής.

Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον Ομότιμο Καθηγητή κ. Αλέξανδρο Πουλοβασίλη για τις συζητήσεις μας, την υποστήριξη, την καθοδήγηση και τη βοήθειά του όποτε κι αν του τη ζήτησα.

Αν και έχουν φύγει από κοντά μας, δεν μπορώ να μην ευχαριστήσω δυο μεγάλους Δασκάλους μου, τον αείμνηστο Καθηγητή Κωνσταντίνο Μπαλή που μου έδωσε τις πρώτες γνώσεις σχετικά με τη Γεωπονία και τους βιολογικούς μηχανισμούς, εισάγοντάς με στο μαγικό μικρόκοσμο του εδάφους και το φίλο μου αείμνηστο Καθηγητή Λεωνίδα Λουλούδη που με τις αναλύσεις του και την ευρυμάθειά του με έκανε να αγαπήσω αυτό το αντικείμενο.

Τέλος, ένα ευχαριστώ είναι το ελάχιστο που μπορώ να πω στην οικογένειά μου. Ετσι θέλω να ευχαριστήσω τον Ιορδάνη, που με στήριξε και με ανέχτηκε σε όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου, το Γιώργο, που αν και μακριά με εμψύχωνε με το δικό του ιδιαίτερο τρόπο, την Εύα για την υποστήριξη και την υπομονή που έδειξε παραμερίζοντας πολλές φορές τις δικές της ανάγκες, τη Δέσποινα που με την ενθαρρυντική της στάση μου έδωσε κουράγιο στα δύσκολα. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, τον πατέρα μου Μιχάλη γιατί ήταν ο πρώτος που πίστεψε σε μένα, τη μητέρα μου Ευαγγελία για την ηθική, πρακτική και υλική της υποστήριξη και τη δεύτερη μητέρα μου Ειρήνη Χατζηπαυλίδου για τη δύναμή της που για μένα υπήρξε πηγή έμπνευσης.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή xi
0.1 English Summary xi

1 Βασικές Εννοιες και Ιστορική Αναδρομή 1
1.1 Η Αναπαράσταση του Γεωγραφικού Χώρου 1
1.2 Χαρτογραφία: Από την Αρχαιότητα έως Σήμερα 2
1.3 Γεωγραφικές Συντεταγμένες 5
1.4 Κατασκευή Χαρτών – Γεωγραφικές Προβολές 6
1.5 Εξέλιξη της Χαρτογραφίας – Γεωγραφικά Πληροφοριακά Συστήματα 8

2 Leonhard Euler 13
2.1 Τα πρώτα χρόνια στην Ελβετία: 1707-1727 13
2.2 Τα πρώτα χρόνια στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης: 1727-1741 16
2.3 Τα χρόνια στο Βερολίνο: 1741-1766 18
2.4 Η δεύτερη περίοδος στην Αγία Πετρούπολη μέχρι το θάνατό του: 1766-1783. 21
2.5 Λίγα λόγια για το έργο του 24
2.5α΄ Η χαρτογραφία στο έργο του Euler 25

3 Διαφορικες Εξισώσεις και Χαρτογραφία 29
3.1 Γιατί δεν υπάρχουν τέλειοι χάρτες 30
3.2 Κατασκευή χαρτών που ικανοποιούν την πρώτη υπόθεση του Euler 36
3.3 Σύμμορφες γεωγραφικές προβολές 38

3.3α′ Ο Χάρτης του Mercator 39
3.3β′ Εύρεση άλλων σύμμορφων προβολών 40
3.4 Γεωγραφικές προβολές που διατηρούν τα εμβαδά 42
3.5 Το πρόβλημα της απόκλισης των γεωγραφικών χαρτών από την πραγματικότητα 46

4 Εκόνες Χαρτών και Σχήματα 51

Βιβλιογραφία 57

Εισαγωγή

Η παρούσα μελέτη χωρίζεται σε τρείς ενότητες.

Στην πρώτη ενότητα πραγματοποιείται μια σύντομη ιστορική αναδρομή στη χαρτογραφία από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα. Παρατίθεται και σχολιάζεται η προσφορά κάποιων σημαντικών χαρτογράφων/μαθηματικών στη χαρτογραφία, το έργο των οποίων επηρέασε σημαντικά και την εξέλιξη των μαθηματικών.

Η δεύτερη ενότητα είναι αφιερωμένη στον Leonhard Euler. O Euler εκτός από χαρτογράφος υπήρξε μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές διάνοιες όλων των εποχών. Υπήρξε πρωτοπόρος σε αρκετά θέματα και ο όγκος του έργου του είναι πραγματικά τεράστιος και απροσπέλαστος ακόμα και για το σύγχρονο μελετητή. Το βάθος των θεωρητικών του συλλογισμών, η ευκολία του να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά για την επίλυση σημαντικών πρακτικών προβλημάτων και η ικανότητά του στους υπολογισμούς τον καθιστούν συγκρίσιμο με τον Αρχιμήδη. Η ιδιαίτερη αναφορά στον Euler οφείλεται στο γεγονός ότι στην τρίτη ενότητα της εργασίας θα παρουσιάσουμε τις μαθηματικές του ιδέες στην χαρτογραφία.

Στην τρίτη ενότητα θα εξηγήσουμε πως ο Euler θεμελιώνει και αντιμετωπίζει με χρήση των διαφορικών εξισώσεων το πρόβλημα της χαρτογραφίας.

0.1 English Summary

This study entitled “The application of differential equations in cartography” is divided into three sections.
In the first section there is a brief historical review of cartography from antiquity to the present. Mathematicians, whose work has significantly influenced the evolution of mathematics, have made important contributions in cartography which are cited and commented.
The second section is dedicated to Leonhard Euler. Apart from a cartographer, Euler has been one of the greatest mathematical geniuses of all time. He has been a pioneer in several fields and the volume of his work is really enormous and inaccessible even for the contemporary scholar. Euler is distinguished for

the depth of his theories, the ease of using mathematics to solve important practical problems and finally his ability to make mathematical computations. The particular reference to him is due to the fact that in the third part of this work we will present his mathematical ideas in cartography.
In the third section we will explain how Euler establishes and addresses the problem of cartography using differential equations. Euler proved that there is no ”perfect” or ”accurate” mapping from the sphere to the plane but a map that maintains the distances (relative to some factor) in a series of curves. This result arose from the study of partial differential equations. Considering this negative conclusion, Euler assumed that in order to obtain the most accurate mapping, the best possible approach should be found. He studies systematically the Partial Differential Equations satisfying various projections of the sphere to plane. Euler studied the following three kinds of maps:

(1) Maps where the images of all meridians are perpendicular to a given horizontal axis and all parallels are parallel to it.

(2) Maps which are conformal.

(3) Maps which preserve areas. Here, it is also assumed that the images of all meridians are intersected by the images of the parallels at right angles.

In the third section we present geographical maps of each of the three kinds constructed by Euler’s method.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Εννοιες και Ιστορική Αναδρομή

1.1 Η Αναπαράσταση του Γεωγραφικού Χώρου

Η αδυναμία εποπτείας του γεωγραφικού χώρου οδήγησε από πολύ νωρίς, ήδη από την παλαιολιθική εποχή, στην επινόηση της αναπαράστασης του χώρου, στην αρχή μέσω απεικονίσεων του πλησιέστερου περιβάλλοντος και στη συνέχεια του ευρύτερου. Η αναπαράσταση αυτή είχε ως πρακτικό αποτέλεσμα την επινόηση των χαρτών. Η επιλογή χαρακτηριστικών του τρισδιάστατου γεωγραφικού χώρου και η παρουσίαση τους μέσω συμβόλων σε δύο διαστάσεις είναι μια αφαιρετική διαδικασία αρκετά προωθημένη για τον πρωτόγονο ανθρώπινο νου. Ωστόσο, οι πρώτοι χάρτες σύμφωνα με τον [22] πρέπει να εμφανίστηκαν πριν από τη γραφή, έτσι όπως τουλάχιστο προκύπτει από μαρτυρίες ταξιδιωτών που ήρθαν σε επαφή με πρωτόγονους λαούς που, χωρίς να έχουν ανακαλύψει τη γραφή, ζωγράφιζαν χάρτες. Φαίνεται ότι η δημιουργία του χάρτη είναι αποτέλεσμα της έμφυτης τάσης του ανθρώπου να επικοινωνήσει με τους συνανθρώπους του. Οι άνθρωποι ζώντας ως κυνηγοί και πολεμιστές μετακινούνταν πολύ στο χώρο και η γνώση για διευθύνσεις και αποστάσεις ήταν σημαντική για την επιβίωση τους, γι' αυτό, από πολύ παλιά, παρατηρείται η ανάπτυξη συστημάτων δημιουργίας χαρτών. Στη συνέχεια, η ανάγκη και η χρησιμότητα των χαρτών έγινε αντιληπτή πρώτα από τους ναυσιπλόους, τους εξερευνητές και τους στρατιωτικούς και πολύ αργότερα από τους πολιτικούς.

1.2 Χαρτογραφία: Από την Αρχαιότητα έως Σήμερα

Χαρτογραφία είναι η επιστήμη η οποία συνδέει τη Γεωμετρία με τον πραγματικό κόσμο, δηλαδή τη «Φύση» [21].

Αυτός που πρώτος έφερε τη χαρτογραφία στον χώρο της επιστήμης ήταν ο Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος, γύρω στα μέσα του 6ου αι. π.Χ. Ο κόσμος του Αναξιμάνδρου, ο οποίος θεωρούσε τη γη κύλινδρο αιωρούμενο στο κέντρο του ουράνιου θόλου, εκτεινόταν από τον Ατλαντικό Ωκεανό ως την Κασπία θάλασσα και είχε κέντρο του το Αιγαίο. Ο ίδιος αναφέρεται ότι είχε κατασκευάσει και ένα σχεδιάγραμμα της γης πάνω σε μια ορειχάλκινη πλάκα. Γύρω στο 500 π.Χ. έχουμε τον περίφημο χάρτη του Εκαταίου, που και αυτός ήταν Μιλήσιος. Ο χάρτης του θα είχε ασφαλώς βασιστεί και στα νέα στοιχεία που μόλις είχαν γίνει γνωστά μετά το ταξίδι που είχε κάνει από τις εκβολές του Ινδού ποταμού ως την Ερυθρά θάλασσα, ο Σκύλαξ από τα Καρυάνδα της Καρίας, στο δεύτερο μισό του 6ου αι. π.Χ. Ακόμη θα είχε λάβει υπόψη του χρήσιμες πληροφορίες που είχαν προκύψει μετά την εκστρατεία του Δαρείου το 532 π.Χ. στη Σκυθία, όπως και αυτές που είχε ο ίδιος συλλέξει στα πολλά ταξίδια του.

Τους επόμενους αιώνες η χαρτογραφία αναπτύχθηκε πολύ εξαιτίας της περαιτέρω διεύρυνσης των ορίων τού τότε γνωστού κόσμου, διεύρυνσης που έφτασε στο αποκορύφωμά της με την εκστρατεία του Μεγάλου Αλεξάνδρου στην Ανατολή. Την ίδια εποχή ο Πυθέας, από τη Μασσαλία, πέρασε το Στενό του Γιβραλτάρ και τραβώντας ρότα προς Βορρά έφτασε πιθανόν ως τη Σκανδιναβική χερσόνησο. Ωστόσο στη μεγάλη ανάπτυξη της χαρτογραφίας στα χρόνια αυτά σημαντικό ρόλο παίζει και η παρατηρούμενη πρόοδος επιστημών που σχετίζονται άμεσα με αυτήν, με πρωταγωνιστή τον Αριστοτέλη. Σε μαθητή του τελευταίου, και συγκεκριμένα στον Δικαίαρχο από τη Μεσσήνη, αποδίδεται και η πρώτη προσπάθεια καταμέτρησης των διαστάσεων της γης. Με μια οριζόντια γραμμή, που άρχιζε από τις Ηράκλειες Στήλες (σημ. Γιβραλτάρ) και κατέληγε στον Ινδικό Καύκασο, γνωστή ως «διάφραγμα», διαίρεσε τη γη σε δύο τμήματα, το βόρειο και το νότιο. Ο ίδιος ο Δικαίαρχος (ή κάποιος μεταγενέστερος γεωγράφος) πρόσθεσε στην οριζόντια αυτή γραμμή και μία «κάθετο», που περνούσε από τη θρακική Λυσιμάχεια και την αιγυπτιακή Συήνη (σημ. Ασουάν). Τόσο το «διάφραγμα» όσο και η «κάθετος» περνούσαν από τη Ρόδο, που έτσι γινόταν το κέντρο του τότε γνωστού κόσμου.

Κατά τα χρόνια της ρωμαιοκρατίας, με την καλύτερη γνώση των διαφόρων κατοικημένων ή μη περιοχών, παρατηρήθηκε σημαντική πρόοδος και στον χώρο της χαρτογραφίας. Ο Μαρίνος ο Τύριος (1ος-2ος αι. μ.Χ.), ένας από τους σπουδαιότερους θεμελιωτές της λεγόμενης μαθηματικής γεωγραφίας, ήταν αυτός που καθιέρωσε τον μεσημβρινό των Μακάρων νήσων (τα σημερινά Κανάρια νησιά) ως αφετηρία για τη μέτρηση των γεωγραφικών μηκών.

Ωστόσο όλους τους παραπάνω επισκιάζει ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (90 - 168 μ.Χ.) που, γεννημένος στην ΠτολεμαΪδα της Αιγύπτου και ζώντας στην Αλεξάνδρεια, επινόησε τον 2ο αι. μ.Χ. μια μέθοδο που επέτρεπε την κατασκευή των ακριβέστερων χαρτών που είχε ως τότε δει ο κόσμος [18]. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι οι χάρτες του Πτολεμαίου χρησιμοποιήθηκαν από τον Marco Polo (1254-1324 μ.Χ.) για να πραγματοποιήσει τα ταξίδια του στην Κίνα. Ο Πτολεμαίος αν και ασκεί οξύτατη κριτική στο έργο του Μαρίνου, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι βασίστηκε τόσο στο έργο του τελευταίου όσο και άλλων παλιότερων γεωγράφων, όπως του Ιππαρχου από τη Νίκαια (2ος αιώνας π.Χ.), του Θεοδοσίου από την Τρίπολη (2ος αιώνας π.Χ.) και του Μενελάου από την Αλεξάνδρεια (1ος – 2ος αιώνας μ. Χ). Διάσημα έργα του Πτολεμαίου είναι τα εξής:

(1) Μαθηματική Σύνταξις, γνωστό και ως **Almagest.** Το Almagest προέρχεται από το Αραβικό “al Majisti” που είναι παραφθορά του ελληνικού επιθέτου «Μέγας» στον υπερθετικό βαθμό «Μέγιστος». Η ”Μαθηματική Σύνταξις” μαζί με τα ”Στοιχεία” του Ευκλείδη θεωρούνται τα πλέον σημαντικά επιστημονικά συγγράμματα. Σε αυτό το έργο ο Πτολεμαίος προτείνει την γεωκεντρική θεωρία, μια θεωρία που άντεξε για 1400 χρόνια μέχρι που ο Κοπέρνικος (1543) παρουσίασε και απέδειξε το ηλιοκεντρικό σύστημα.

(2) Γεωγραφία. Στη ”Γεωγραφία”, για τον υπολογισμό των αποστάσεων ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί συγκρίσεις των τόξων της Ουράνιας σφαίρας με αντίστοιχα τόξα κύκλων στη Γη.

(3) Planisphaerum. Σε αυτό το έργο ο Πτολεμαίος διερεύνησε ουσιαστικά τις ιδιότητες μιας σπουδαίας προβολής από τη σφαίρα στο επίπεδο που είναι γνωστή σήμερα ως στερεογραφική προβολή, (βλέπε Εικόνα 1).

Ολα σχεδόν τα έργα του ο Πτολεμαίος τα έγραψε στα ελληνικά αλλά δυστυχώς δεν έχουν διασωθεί τα πρωτότυπα. Τα έργα του όμως διασώθηκαν επειδή είχαν μεταφραστεί στα αραβικά και λατινικά.

Ο Πτολεμαίος γνώριζε ότι στους γεωγραφικούς χάρτες δεν είναι δυνατόν να διατηρηθούν ταυτόχρονα οι γωνίες και οι αποστάσεις και προσπάθησε να βρει τον καλύτερο λογικό συμβιβασμό μεταξύ των αντίστοιχων παραμορφώσεων. Επίσης, ο Πτολεμαίος, όπως και οι προγενέστεροι από αυτόν, Ελληνες μαθηματικοί και γεωγράφοι (αναφέρθηκαν παραπάνω) γνώριζαν ότι η γη είναι σφαιρική. Ο μύθος που υποστήριζε ότι το σχήμα της γης είναι επίπεδο δεν είχε πολλούς υποστηρικτές μεταξύ των επιστημόνων στην αρχαία Ελλάδα. Ο Αριστοτέλης αναφέρει ότι οι προ-σωκρατικοί φιλόσοφοι Αναξιμένης, Αναξαγόρας και Δημόκριτος θεωρούσαν ότι η γη είναι σφαιρική. Ο Πλάτωνας τεκμηρίωσε και φιλοσοφικά για ποιο λόγο η γη έχει σφαιρικό σχήμα, υποστηρίζοντας ότι ο Δημιουργός θα έδινε στον υλικό κόσμο το πλέον συμμετρικό σχήμα, που δεν είναι άλλο από αυτό της σφαίρας (Τιμαίος, Πλάτων).

Κατά το μεσαίωνα, υπάρχει ανάπτυξη της γεωγραφίας στους Αραβες, οι οποίοι αφού μελέτησαν τις εργασίες του Μαρίνου από την Τύρο και του Πτολεμαίου, δημιούργησαν μια μεγάλη σχολή γεωγραφίας και χαρτογραφίας. Πολύ σημαντικές θεωρούνται οι εργασίες του ιστορικού και γεωγράφου al-Masudi καθώς και εκείνες του μαθηματικού και γεωγράφου al-Biruni, ο οποίος περιέγραψε διάφορες νέες γεωγραφικές προβολές.

Κατά την Αναγέννηση η αναγκαιότητα δημιουργίας γεωγραφικών χαρτών ενισχύθηκε λόγω της ανακάλυψης των νέων χωρών. Οι Leonardo da Vinci και Albrecht Durer, που εκτός από καλλιτέχνες ήταν και αξιόλογοι μαθηματικοί, ασχολήθηκαν με τη γεωγραφία. Εργάστηκαν στα τεχνικά προβλήματα που ανακύπτουν κατά τη δημιουργία ενός γεωγραφικού χάρτη και έδωσαν στις δημιουργίες τους καλλιτεχνική χροιά, (βλέπε Εικόνα 2).

Δια μέσου των αιώνων τα μαθηματικά έπαιζαν πάντα ένα κυρίαρχο ρόλο στην χαρτογραφία και η εξέλιξη τους συνεισέφερε στην κατασκευή πλέον αξιόπιστων χαρτών. Γι' αυτό πολλοί χαρτογράφοι υπήρξαν και σπουδαίοι μαθηματικοί. Ο Πτολεμαίος, για παράδειγμα, υπήρξε μεγάλος μαθηματικός που μαζί με τον Μενέλαο θεωρούνται οι θεμελιωτές της σφαιρικής γεωμετρίας. Στους σύγχρονους χρόνους (18ος αιώνας και μετά) η χαρτογραφία συνδέεται με τα μαθηματικά όσο ποτέ στο παρελθόν. Ετσι, όχι μόνο οι χαρτογράφοι χρησιμοποιούν μαθηματικές μεθόδους για την κατασκευή χαρτών αλλά και χάρη στην χαρτογραφία πολλοί κλάδοι των μαθηματικών αναπτύχθηκαν. Για παράδειγμα, ο Darboux (1842-1917) σε μία ομιλία στην Ρώμη (1908) αναφέρει οτι η απαρχή της διαφορικής γεωμετρίας βρίσκεται στην χαρτογραφία. Πολλοί σημαντικοί μαθηματικοί του 18ου και του 19ου αιώνα ασχολήθηκαν με την χαρτογραφία. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά τους Lambert, Lagrange, Euler, Chebyshev, Beltrami και Gauss. Επιπλέον, σε εργασίες διαφόρων Γάλλων γεωμετρών, όπως των Liouville, Bonnet, Dabroux και άλλων, η χαρτογραφία κατέστη μία εφαρμογή του απειροστικού λογισμού και ένα σημαντικό κεφάλαιο της διαφορικής γεωμετρίας επιφανειών [21].

Πατέρας της χαρτογραφίας θεωρείται ο Lambert (1727-1777) ο οποίος κατασκεύασε (1772) γεωγραφικές προβολές με αξιοσημείωτες ιδιότητες, όπως μια κωνική σύμμορφη προβολή (οι μεσημβρινοί απεικονίζονται σε συντρέχουσες ευθείες και οι παράλληλες σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το σημείο τομής των ευθείων) και μια κωνική προβολή που διατηρεί τα εμβαδά. Εδωσε επίσης ένα μαθηματικό χαρακτηρισμό των προβολών που διατηρούν τις γωνίες.

Ο Lagrange (1727-1813) μελέτησε και επέκτεινε τις ιδιότητες πολλών γνωστών προβολών. Την στερεογραφική προβολή την αποδίδει στον Πτολεμαίο. Παρατηρεί ότι για να κατασκευάσει κάποιος μια προβολή αρκεί να σταθεροποιήσει στο επίπεδο ένα δίκτυο ′′μηχανικών καμπυλών′′. Παρατηρεί ότι υπάρχουν άπειρες προβολές οι οποίες διατηρούν τις γωνίες και ακολούθως εισάγει ένα συντελεστή στρέβλωσης για να υπολογίσει την καλύτερη τέτοια προβολή. Σε ειδικές περιπτώσεις υπολογίζει επακριβώς τον συντελεστή στρέβλωσης. Επίσης μελετά κατ' αναλογία, προβολές στο επίπεδο που διατηρούν τις γωνίες και ορίζονται πάνω στις εκ περιστροφής επιφάνειες.

Σαν συνέχεια όλων αυτών ο Gauss (1777-1855) ασχολείται με την χαρτογραφία. Στην εργασία του [12] διακηρύσσει ότι σκοπός του είναι η κατασκευή χαρτών και η μελέτη της χαρτογραφίας γενικότερα. Η χαρτογραφία είναι λοιπόν η αφετηρία για να ανακαλύψει τα περίφημα θεωρήματα των επιφανειών, το λεγόμενο «Υπέροχο Θεώρημα» και το «Θεώρημα ύπαρξης ισοθερμικών συντεταγμένων».

Ο Chebychev, ο επονομαζόμενος και Αρχιμήδης της Ρωσίας, διότι συνδύαζε τα μαθηματικά με μηχανικές κατασκευές, σαν θαυμαστής του Lagrange επέκτεινε τη δουλειά του μελετώντας κυρίως τις «καλύτερες» σύμμορφες απεικονίσεις με βάση τον συντελεστή στρέβλωσης του Lagrange.

Ο Beltrami (1835-1900) παρατηρεί ότι οι πλέον ενδιαφέρουσες γεωγραφικές προβολές είναι αυτές που διατηρούν τις γωνίες και τα εμβαδά αλλά υπάρχουν και άλλες ιδιότητες που μπορεί να έχουν οι προβολές και αξίζει να μελετηθούν, όπως για παράδειγμα οι μέγιστοι κύκλοι να απεικονίζονται σε «σχεδόν ευθείες». Αυτή η ιδέα παίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά των τελευταίων τριάντα χρόνων.

Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει στον Tissot (1824-1897) ο οποίος μελετά πρώτος μη σύμμορφες απεικονίσεις της κλάσης C^1, δηλαδή διαφορίσιμες με συνεχείς παραγώγους. Παρατηρεί ότι απειροστοί κύκλοι στέλνονται σε απειροστές ελλείψεις και εισάγει ένα συντελεστή στρέβλωσης για μη σύμμορφες απεικονίσεις και αποδεικνύει ενδιαφέρουσες ιδιότητες των μη-σύμμορφων απεικονίσεων.

1.3 Γεωγραφικές Συντεταγμένες

Ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας γίνεται με τη βοήθεια δύο μεταβλητών, του γεωγραφικού μήκους και του γεωγραφικού πλάτους που συνιστούν το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων. Το σύστημα αυτό ορίζεται με τη βοήθεια δύο κατηγοριών νοητών γραμμών της επιφάνειας αναφοράς, των μεσημβρινών και των παραλλήλων, (βλέπε Εικόνα 3).

Μεσημβρινός ενός σημείου είναι η τομή της επιφάνειας της σφαίρας με το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο και τον άξονα περιστροφής της Γης.

Παράλληλος ενός σημείου είναι η τομή της επιφάνειας της σφαίρας με το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο και είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση της σφαίρας οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι είναι κύκλοι, ενώ η ακτίνα των παραλλήλων μειώνεται όσο πλησιάζουμε στους πόλους. Ο παράλληλος που διέρχεται από το κέντρο της Γης και είναι σε μέγεθος μεγαλύτερος από όλους τους άλλους και ονομάζεται Ισημερινός.

Η θέση της προβολής του σημείου επάνω στην επιφάνεια της σφαίρας προσδιορίζεται με τη βοήθεια των γεωγραφικών συντεταγμένων, δηλαδή, δύο γωνιών. Η γωνία που σχηματίζει η κάθετος από το σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας με το επίπεδο του ισημερινού ονομάζεται γεωγραφικό πλάτος (u). Η δίεδρη γωνία που σχηματίζεται από το επίπεδο του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο και από έναν αυθαίρετα επιλεγμένο μεσημβρινό αναφοράς ονομάζεται γεωγραφικό μήκος (t). Ως μεσημβρινός αναφοράς με γεωγραφικό μήκος 0° (μηδενικός μεσημβρινός), συνήθως, ορίζεται ο μεσημβρινός που διέρχεται από το αστεροσκοπείο του Greenwich. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες μετρώνται σε μοίρες. Η τιμή του γεωγραφικού πλάτους κυμαίνεται από 0° ως 90° στο βόρειο ημισφαίριο της Γης και από 0° ως -90° στο νότιο ημισφαίριο ενώ του γεωγραφικού μήκους κυμαίνεται από 0° ως 360° [20].

1.4 Κατασκευή Χαρτών – Γεωγραφικές Προβολές

Προκειμένου να απεικονισθούν οι παγκόσμιοι χάρτες θα πρέπει να υπάρξουν προβολές των σημείων από τη σφαίρα στο επίπεδο οι οποίες να ικανοποιούν συγκεκριμένες απαιτήσεις, έτσι ώστε τα προβαλλόμενα είδωλα (ή οι προβαλλόμενες εικόνες) να μην παρουσιάζουν μεγάλη παραμόρφωση της πραγματικότητας. Ετσι, είναι σύνηθες, αντί του επιπέδου να χρησιμοποιούνται άλλες επίπεδες επιφάνειες για την προβολή των σημείων της σφαίρας, επιφάνειες που είναι τοπικά ισομετρικές προς το επίπεδο. Τέτοιες επιφάνειες είναι για παράδειγμα ο κύλινδρος και ο κώνος.

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι ο κύλινδρος και ο κώνος είναι επίπεδες επιφάνειες: εάν «κοπούν» αυτές οι επιφάνειες κατά μήκος οποιουδήποτε γενήτορα λαμβάνουμε επιφάνειες που δύναται να ενσωματωθούν ισομετρικά πάνω στο επίπεδο. Με τη χρήση λοιπόν του κυλίνδρου και του κώνου κατασκευάζονται εύκολα, γεωμετρικά, γεωγραφικές προβολές, (βλέπε Εικόνα 4).

Ποιες είναι όμως οι προϋποθέσεις που θα πρέπει να πληρούνται ώστε μια προβολή να είναι τέλεια;

Η τέλεια προβολή είναι αυτή η οποία αντιγράφει τον παγκόσμιο χάρτη από τη σφαίρα (ή από ένα μέρος αυτής) στο επίπεδο, διατηρώντας τις αποστάσεις, δηλαδή είναι μία ισομετρία (τοπική ισομετρία).

Ας ορίσουμε τη μοναδιαία σφαίρα (η ακτίνα δεν είναι σημαντική σ' αυτή την περίπτωση: η μέτρηση μεταξύ δύο σημείων της σφαίρας είναι η γωνία που σχηματίζεται από τις ακτίνες που περνούν από τα σημεία αυτά).

Παραδείγματα Γεωγραφικών Προβολών

1. Η γεωγραφική προβολή του Μαρίνου του Τύριου

Αυτή η προβολή μελετήθηκε και κατακρίθηκε από τον Πτολεμαίο
Οι μαθηματικοί τύποι είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= u \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου t είναι το γεωγραφικό μήκος και u το γεωγραφικό πλάτος.

Η ανωτέρω απλή προβολή που αποδίδεται στο Μαρίνο τον Τύριο, η οποία ανακαλύφθηκε, σύμφωνα με τον Πτολεμαίο, το 100 μ.Χ. Οι προβολές των μεσημβρινών στους συγκεκριμένους χάρτες αποτελούνται απο κατακόρυφες ευθείες και οι παράλληλες απεικονίζονται σε οριζόντιες ευθείες γραμμές, (βλέπε Εικόνα 5). Η προβολή δεν είναι σύμμορφη ούτε διατηρεί τα εμβαδά. Εξαιτίας δε των παραμορφώσεων που προκαλούνται, έχει μικρή αξία για τη ναυσιπλοΐα.

2. Η κυλινδρική προβολή του Lambert

Είναι μία κυλινδρική προβολή που διατηρεί τα εμβαδά όπως θα δούμε παρακάτω. Οι μαθηματικοί τύποι που την περιγράφουν είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \sin u \end{aligned} \tag{1.2}$$

Πρόκειται για μια σημαντική προβολή με αξιοσημείωτες ιδιότητες. Ο χάρτης όμως που κατασκευάζεται με βάση αυτή την προβολή παρουσιάζει πολύ μεγάλη παραμόρφωση και τούτο διότι στη σφαίρα οι παράλληλοι τείνουν να γίνονται μικρότεροι καθώς μετακινούμαστε προς τους πόλους ενώ στις προβολές στο επίπεδο έχουν το ίδιο μέγεθος. Επίσης, οι εικόνες των ισοσταθμισμένων παραλλήλων στη σφαίρα έρχονται πολύ κοντά στον κύλινδρο όταν μεταφερόμαστε προς τον πόλο, (βλέπε Εικόνα 6).

3. Οι κωνικές προβολές του Πτολεμαίου

Στην πρώτη κωνική προβολή, οι μεσημβρινοί απεικονίζονται σε ευθείες και συναντώνται σε ένα σημείο που βρίσκεται βόρεια του πόλου. Οι παράλληλες είναι κύκλοι. Μ' αυτήν την προβολή ο Πτολεμαίος κατασκεύασε χάρτες σημαντικά βελτιωμένους, (βλέπε Εικόνα 7).

Τα χαρακτηριστικά αυτής της προβολής είναι τα ακόλουθα :

- Είναι κωνική

- Διατηρεί ισαπέχοντες παραλλήλους
- Δεν είναι ούτε σύμμορφη ούτε διατηρεί τα εμβαδά.
- Οι Μεσημβρινοί συγκλίνουν σε ένα κοινό σημείο.

Η δεύτερη κωνική προβολή είναι πιο εξελιγμένη και περιπεπλεγμένη, (βλέπε Εικόνα 8). Σ' αυτήν οι γραμμές του γεωγραφικού πλάτους και του γεωγραφικού μήκους είναι καμπύλες και κατ' αυτό τον τρόπο παρέχει ένα πιο ικανοποιητικό σχήμα της γήινης σφαίρας, στο επίπεδο. Η απεικόνιση είναι πολύ δυσκολότερο να κατασκευασθεί και βασικά ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί αστρονομικές παρατηρήσεις για να βελτιώσει την ακρίβεια του χάρτη που προκύπτει από την πρώτη προβολή.

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι όλοι οι χάρτες που κατασκευάστηκαν από τον Πτολεμαίο θεωρούνται χαμένοι.

4. Η προβολή του Mercator

Το 1569 ο Mercator κατασκεύασε εμπειρικά το χάρτη του. Το 1599, ο Αγγλος μαθηματικός Edward Wright εξήγησε τα μαθηματικά αυτού του χάρτη. Πρόκειται για έναν χάρτη στον οποίο οι γωνίες διατηρούνται, (βλέπε Εικόνα 9).

Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των χαρτών είναι οι Λοξόδρομες καμπύλες που στη σφαίρα τέμνουν με την ίδια γωνία κάθε Μεσημβρινό και απεικονίζονται ως ευθεία γραμμή. Αυτή η ευθεία τέμνει όλους τους Μεσημβρινούς, οι οποίοι είναι ευθείες στο χάρτη, με την ίδια γωνία. Παρακάτω θα δούμε πως η προβολή του Mercator προκύπτει με την μέθοδο του Euler σαν λύση διαφορικών εξισώσεων.

1.5 Εξέλιξη της Χαρτογραφίας – Γεωγραφικά Πληροφοριακά Συστήματα

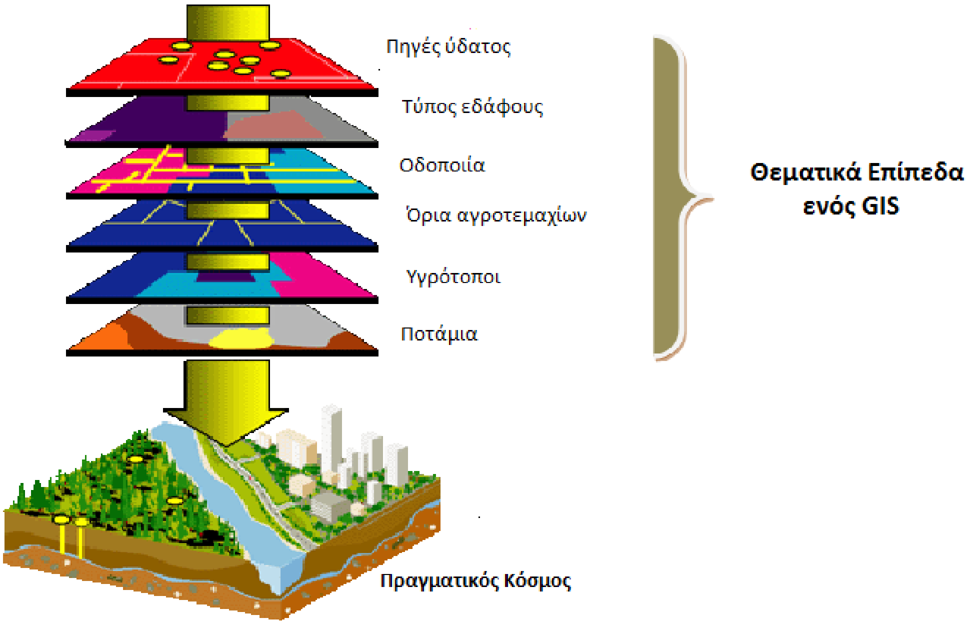
Η ανάπτυξη της χαρτογραφίας και η χρήση των χαρτών δεν υπήρξαν ποτέ ανεξάρτητες από την άσκηση πολιτικής και αποτέλεσαν σημαντικό εργαλείο στην άσκησή της. Η συνδυαστική χρήση των χαρτογραφικών δεδομένων με στατιστικά στοιχεία έκανε την εμφάνισή της για πρώτη φορά στα μέσα του 19ου αιώνα και αποτέλεσε βάση για την άσκηση πολιτικής σε πολλά θέματα, κυρίως στην πρόληψη του κινδύνου και τη διασφάλιση των συμφερόντων των χωρών. Εκτός όμως των πολιτικών και στρατιωτικών εφαρμογών οι χάρτες χρησιμοποιήθηκαν ως αποδεικτικά εργαλεία και για άλλες επιστήμες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η τεκμηρίωση, βάση χαρτογραφικών δεδομένων, της πηγής διασποράς πανώλης στη βόρεια Σκωτία, που προερχόταν από μια κοινόχρηστη βρύση.

Η χαρτογραφία μέχρι και τα μέσα του 20ου αιώνα αποτελούσε αντικείμενο εξειδικευμένων επιστημόνων και ουσιαστικά μια κλειστή κάστα. Για να ασχοληθεί κάποιος με τη χαρτογραφία και τη δημιουργία χαρτών απαιτείτο μελέτη χρόνων και πολύ ειδικές γνώσεις.

Κατά τη διάρκεια των δεκαετιών του ’60 και του ’70 έγινε η πρώτη προσπάθεια για συστηματική χρησιμοποίηση των χαρτογραφικών δεδομένων. Η ανάπτυξη μεθόδων λήψης και ανάλυσης αεροφωτογραφιών και εικόνων τηλεανίχνευσης είχαν ως αποτέλεσμα τη χαρτογράφηση με μεγαλύτερη ακρίβεια από ότι τα προηγούμενα χρόνια. Οι ίδιες μέθοδοι ήταν αυτές που έδωσαν στους επιστήμονες τεράστιες δυνατότητες όχι απλώς για έρευνα, αλλά και για σημαντική αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων που προέκυπταν από αυτή.

Ιδιαίτερα οι σχεδιαστές και οι αρχιτέκτονες στις Η.Π.Α. συνειδητοποίησαν ότι τα δεδομένα που προέρχονται από διαφορετικές πρωτογενείς έρευνες, μπορούν να συνδυαστούν και να ενοποιηθούν επικαλύπτοντας διαφανή αντίγραφα χαρτών σε μία φωτεινή τράπεζα. Ο πιο γνωστός υποστηρικτής της απλής αυτής τεχνικής ήταν ο αμερικανός αρχιτέκτονας !an McHarg. Η πρώτη οργανωμένη προσπάθεια χρησιμοποίησης των χαρτογραφικών δεδομένων από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή έγινε το 1963 από τον Howard T. Fisher. Το πρόγραμμα του Fisher ονομάστηκε SYMAP (Synagraphic MAPping System) και δημιουργούσε απλούς χάρτες τυπώνοντας στατιστικές τιμές πάνω σε έναν κάναβο, ενώ τα αποτελέσματα προβάλλονταν με πολλούς τρόπους χρησιμοποιώντας διαδοχικές γραμμικές εκτυπώσεις για την παραγωγή κατάλληλων αποχρώσεων του γκρι. Το πρόγραμμα SYMAP ακολούθησε μία σει-ρά άλλων προγραμμάτων χαρτογράφησης όπως το GRID και το IMGRID που είχαν τη δυνατότητα να χρωματίζουν και να σκιαγραφούν επιφάνειες με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών ότι ο Mc Harg με τις διαφανείς επικαλύψεις. Από τότε μία σειρά εξελίξεων όχι μόνο στα προγράμματα αυτά αλλά και στην τεχνολογία των υπολογιστών ως μηχανήματα, αλλά κυρίως με την εμφάνιση του λειτουργικού Web 2.0, είχαν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία των νέων συστημάτων που χειρίζονται, αναλύουν και παρουσιάζουν πληροφορίες από το γεωγραφικό χώρο. Για το λόγο αυτό ονομάστηκαν Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών (G.I.S), ή Συστήματα Πληροφοριών Γης (L.I.S.) και χρησιμοποιήθηκαν από ένα ευρύ κοινό επιστημόνων ποικίλων ειδικοτήτων που συνεχώς αυξάνεται [5].

Τι είναι όμως τα Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών; Παρόλο που δεν υπάρχει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός, οι περισσότεροι τείνουν να συμφωνήσουν ότι ΓΣΠ είναι το σύνολο υλικού, λογισμικού και διαδικασιών το οποίο με την κατάλληλη χρήση υποστηρίζει τη συλλογή, διαχείριση, ανάλυση, μοντελοποίηση και παρουσίαση δεδομένων με χωρική αναφορά για την επίλυση προβλημάτων διαχείρισης και σχεδιασμού. Η απλούστερα θα μπορούσε να ειπωθεί ότι τα ΓΠΣ είναι συστήματα υπολογιστών τα οποία διατηρούν και χρησιμοποιούν δεδομένα που περιγράφουν συγκεκριμένες περιοχές της γης [29]. Στις μέρες μας, τα ΓΠΣ έχουν αναδειχθεί ως μια αποτελεσματική τεχνολογία διαχείρισης και ανάλυσης γεωγραφικών δεδομένων. Οι εξελιγμένες δυνατότητες τις οποίες παρέχουν για την αποθήκευση, ανάκτηση ανάλυση, μοντελοποίηση και χαρτογραφική απόδοση εκτεταμένων περιοχών με τη χρήση μεγάλου όγκου χωρικών δεδομένων, έχει οδηγήσει σε βαθμιαία εξάπλωση των εφαρμογών τους.



Σχεδιάγραμμα 1 : Θεματικά επίπεδα ενός ΓΠΣ
(πηγή: https://www.valorgis.com/gisis b.html)

Ενας συνηθισμένος τρόπος θεώρησης των ΓΠΣ, είναι αυτός της οργάνωσης των χωρικών πληροφοριών με σειρά επιπέδων (layers) τα οποία αφορούν στην ίδια γεωγραφική περιοχή, βλέπε Σχεδιάγραμμα 1. Το καθένα από αυτά τα επίπεδα περιλαμβάνει είτε δεδομένα στην αρχική τους μορφή (π.χ. τοπογραφικές μετρήσεις, δορυφορικές εικόνες κτλ) είτε επεξεργασμένες θεματικές πληροφορίες (π.χ. είδος βλάστησης, τύπος εδαφών, κλίση επιφανειών, αποτελέσματα ανάλυσης δορυφορικών δεδομένων κτλ). Τα τελευταία αποτελούν και τα θεματικά επίπεδα ενός ΓΠΣ.

Ανάλογες τεχνικές οργάνωσης και ανάλυσης γεωγραφικών πληροφοριών με συμβατικά μέσα, θα μπορούσαν να δώσουν αντίστοιχα αποτελέσματα.

Αυτό όμως είναι σχεδόν αδύνατο να πραγματοποιηθεί σε κάποιο λογικό χρονικό διάστημα. Ετσι, σε πρακτικό επίπεδο τα δεδομένα και οι παράγωγες πληροφορίες είναι οργανωμένα σε ψηφιακή μορφή και η επεξεργασία τους γίνεται με ειδικό λογισμικό, ώστε να αξιοποιούνται οι δυνατότητες και τα πλεονεκτήματα που παρέχει η πληροφορική.

Συνοπτικά, τα πλεονεκτήματα των ΓΠΣ σε σχέση με τις κλασσικές μεθόδους οργάνωσης, ανάλυσης και παρουσίασης γεωγραφικών δεδομένων σχετίζονται με την αξιοποίηση δεδομένων από διαφορετικές πηγές, την ευκολία αναθεωρήσεων και ενημερώσεων, την ευκολία αποθήκευσης και ανάκτησης πληροφοριών, τις δυνατότητες επεξεργασίας και μοντελοποίησης, και τέλος τις εξελιγμένες δυνατότητες αυτοματοποιημένης χαρτογραφίας (ευκολία δημιουργίας εναλλακτικών χαρτογραφικών επιλογών, χαρτογραφική παραγωγή κλπ). Επιπρόσθετα, θα πρέπει να τονιστεί ότι τα ΓΠΣ δεν έχουν να κάνουν μόνο με το που (χωρική διάσταση) βρίσκεται κάποια χωρική οντότητα αλλά ασχολούνται επιπρόσθετα με τη φύση τόσο της οντότητας όσο και της χωρικής διάστασης εξετάζοντας ταυτόχρονα τις υπαρκτές ή πιθανές συσχετίσεις τους. Η σπουδαιότητά τους έγκειται στο ότι οι χωρικές μεταβλητές μπορούν να προσεγγιστούν τόσο με βάση τη χωρική τους διάσταση όσο και με βάση τις ιδιότητές τους. Ετσι, τα ΓΠΣ δεν είναι απλά υπολογιστικά συστήματα για την κατασκευή χαρτών, αλλά αποτελούν αναλυτικά εργαλεία, τα οποία αξιοποιούν τη χωρική, τη θεματική, τη χρονική διάσταση καθώς και τις σχέσεις των γεωγραφικών δεδομένων [29].

Κεφάλαιο 2

Leonhard Euler

Η συμβολή του Leonhard Euler, στην εξέλιξη της χαρτογραφίας υπήρξε καθοριστική. Και για τον ίδιο όμως, όπως αναφέρει σε μια επιστολή του στον Christian Goldbach (1740), η χαρτογραφία υπήρξε «μοιραία» αφού εξαιτίας της επίπονης εργασίας του στη δημιουργία χαρτών, έχασε το ένα του μάτι και ίσως τον οδήγησε σε ολική τύφλωση [21].

Λόγω της σημαντικότητας των ευρημάτων του, όχι μόνο στη χαρτογραφία αλλά γενικότερα στην επιστήμη των μαθηματικών, θεωρούμε ότι θα πρέπει να κάνουμε μια εκτενή αναφορά στη ζωή και το έργο του. Οσα αναφέρει χαρακτηριστικά ο Marquis de Condorcet, στην υμνολογία του, δείχνουν πόσο βαθύ υπήρξε το αποτύπωμά του:

«*...όποιος στο μέλλον ασχοληθεί με τα Μαθηματικά θα έχει ως οδηγό τη διάνοια του Euler... όλοι οι μαθηματικοί είναι μαθητές του*» [6].

Το μεγαλύτερο μέρος των κατωτέρω βιογραφικών στοιχείων που αφορούν στον Leonhard Euler, αντλήθηκε από το βιβλίο του Ronald Calinger [1].

2.1 Τα πρώτα χρόνια στην Ελβετία: 1707-1727

Ο Leonhard Euler γεννήθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας τον Απρίλη του 1707. Ηταν γιος του Paul Euler και της Marguerite Brucker. Λίγο μετά τη γέννησή του η οικογένεια εγκαταστάθηκε στο γειτονικό χωριό του Riechen. Ο πατέρας του ήταν Καλβινιστής πάστορας και επιθυμούσε ο γιος του να τον διαδεχθεί στην εκκλησία του χωριού. Δεδομένου ότι και η μητέρα του προέρχονταν από οικογένεια ιερέων το μέλλον του νεαρού Leonhard φαινόταν προδιαγεγραμμένο. Ετσι ο Euler σε ηλικία 14 χρονών μπήκε στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας για σπουδές στη Θεολογία. Σύντομα όμως έγινε φανερό ότι το ενδιαφέρον του είχε στραφεί στα Μαθηματικά. Ο ίδιος ο πατέρας του, του είχε διδάξει Μαθηματικά από μικρή ηλικία. Ο Paul Euler είχε παρακολουθήσει τις διαλέξεις του καθηγητή Jacob Bernoulli, ενός διακεκριμένου μαθηματικού που κατείχε την έδρα των Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας, και ήταν και ο ίδιος ολοκληρωμένος μαθηματικός. Ο Paul την εποχή της μαθητείας του στο πανεπιστήμιο συγκατοικούσε με τον Johann Bernoulli, μικρότερο αδερφό του Jacob. Την εποχή που πήγε ο Leonhard στο Πανεπιστήμιο ο Jacob Bernoulli είχε πεθάνει και την έδρα των Μαθηματικών κατείχε ο Johann Bernoulli, ο οποίος δίκαια θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ο μεγαλύτερος εν ενεργεία μαθηματικός του κόσμου αφού ο Leibniz είχε πεθάνει λίγα χρόνια πριν ενώ ο Newton είχε από καιρό εγκαταλείψει τα Μαθηματικά λόγω ηλικίας. Ο Leonhard γνώρισε τον Johann Bernoulli καθώς και τους γιους του Daniel και Nicolaus. Ο Johann Bernoulli αναγνώρισε την ιδιοφυΐα του Leonhard στα Μαθηματικά και τον παρότρυνε να εμβαθύνει τις σπουδές του προς την κατεύθυνση αυτή. Ο Bernoulli έγινε πνευματικός καθοδηγητής για το νεαρό φοιτητή. Του πρότεινε μαθηματικά αναγνώσματα για τα οποία συζητούσαν μια φορά τη βδομάδα στο σπίτι του καθηγητή. Στην αυτοβιογραφία του ο Euler γράφει:

Ο Leonard Euler

«Σύντομα μου δόθηκε η ευκαιρία να έχω πρόσβαση στον διάσημο καθηγητή Johann Bernoulli, ο οποίος είχε την καλή διάθεση να με συμβουλεύει γύρω από τις μαθηματικές επιστήμες. Είναι αλήθεια ότι λόγω των εργασιών του αρνήθηκε κατηγορηματικά να μου παραδώσει ιδιαίτερα μαθήματα, μου έδωσε, όμως, μια πολύ πιο σοφή συμβουλή. Μου πρότεινε να προμηθευτώ μερικά δύσκολα βιβλία Μαθηματικών και να τα μελετήσω με μεγάλη επιμέλεια. Οποτε θα

αντιμετώπιζα κενά ή αξεπέραστες δυσκολίες θα μπορούσα να πηγαίνω κάθε Σάββατο το απόγευμα ώστε να διασαφηνίζει όλες τις δυσκολίες. Το έκανε με τέτοιο εύληπτο τρόπο ώστε όποτε υπήρχε η ανάγκη να συμπληρώσει ένα κενό ή να διευκρινίσει μια δυσκολία, δέκα ακόμα κενά ή δυσκολίες εξαφανίζονταν αμέσως. Είναι σίγουρα ο καλύτερος τρόπος να προχωρήσεις στα Μαθηματικά».

Καθώς τα χρόνια περνούσαν και η σχέση τους ωρίμαζε ο Bernoulli συνειδητοποιούσε όλο και περισσότερο ότι αυτός ο νεαρός μαθητής ήταν μοναδικός. Παρόλο που ο πρώτος ήταν ιδιαίτερα ανταγωνιστικός και ευέξαπτος άνθρωπος, κάποτε έγραψε στον Euler τα παρακάτω γενναιόδωρα λόγια:

«*Παρουσιάζω τις υψηλότερες αναλύσεις σαν να ήταν στην παιδική τους ηλικία, εσύ, όμως, τις φέρνεις στην ωριμότητά τους*».

Φαίνεται πως ο Euler ήταν ο αγαπημένος του μαθητής. Δεν ήταν, λοιπόν, τυχαίο που τον αποκαλούσε «πρίγκιπα των Μαθηματικών». Η περίοδος που ο Euler βρισκόταν σε συνεχή επαφή με τον καθηγητή ήταν αποφασιστική για την εξέλιξή του ως μαθηματικού.

Σε ηλικία δεκαπέντε χρονών ο Euler έλαβε από το Πανεπιστήμιο της Βασιλείας το bachelor και δύο χρόνια μετά, το 1724, πήρε master. Με την ευκαιρία της απονομής του μεταπτυχιακού του εκφώνησε ένα λόγο που είχε ως θέμα του μια συγκριτική μελέτη της φιλοσοφίας του Descartes και του Newton. Ο Euler είχε ευρεία μόρφωση γιατί εκτός από τα Μαθηματικά μελέτησε Θεολογία, Ιατρική, Αστρονομία, Φυσική και Γλώσσες. Αργότερα θα τον δούμε να γράφει κυρίως στα λατινικά και μερικές φορές στα γαλλικά παρόλο που η μητρική του γλώσσα ήταν τα Γερμανικά. Το 1727 η Παρισινή Ακαδημία των Επιστημών ανακοίνωσε ένα διεθνές επιστημονικό διαγωνισμό σχετικά με τη θέση των καταρτιών στα πλοία. Ο Euler παρόλο που δεν είχε δει ποτέ στη ζωή του πλοίο συμμετείχε στο διαγωνισμό γράφοντας μια μελέτη, το κυριότερο μέρος της οποίας ήταν η ανάλυση, η μαθηματική τεχνική της εξάρτησης. Η αδυναμία της βρισκόταν στην σχεδόν ολοκληρωτική έλλειψη πρακτικότητας. Τελικά η συμμετοχή του βραβεύτηκε με τιμητική διάκριση (accessit) και δημοσιεύτηκε. Στο μέλλον θα κέρδιζε το πρώτο βραβείο δώδεκα φορές, ένα βραβείο καθόλου ευκαταφρόνητο αν σκεφτεί κανείς πως εκτός από την ικανοποίηση της επιβράβευσης του επιστημονικού του έργου, ο Euler λάμβανε ένα σημαντικό χρηματικό ποσό που τον βοηθούσε να λύσει οικονομικά προβλήματα αλλά και να συνεχίσει με τον ίδιο ζήλο τις συμμετοχές του. Την ίδια περίοδο έκανε αίτηση για τη θέση του καθηγητή της Φυσικής στο πανεπιστήμιο της Βασιλείας και για να υποστηρίξει τη συμμετοχή του έγραψε μια μονογραφία για τον ήχο με τίτλο: "Dissertatio physica de sono". Παρόλο που δεν πήρε τη θέση του καθηγητή, μάλλον λόγω της νεότητάς του, η μελέτη του αξιολογήθηκε ως η δεύτερη καλύτερη και στα χρόνια που θα ακολουθούσαν θα παρέμενε κλασσική. Σε αυτή τη μονογραφία έκανε μια ανακεφαλαίωση της υπάρχουσας γνώσης για την ακουστική, διατύπωσε με μαθηματικό τρόπο και με μεγάλη ευκρίνεια τις βασικές ερωτήσεις και απάντησε σε μερικές από αυτές. Η αποτυχία αυτή δεν τον αποθάρρυνε. Συνέχισε τις μελέτες του ελπίζοντας αυτή τη φορά σε μια θέση στην Ακαδημία των Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης, όπου ήδη βρίσκονταν οι παλιοί φίλοι και συμμαθητές του Daniel και Nicolaus Bernoulli ως καθηγητές Μαθηματικών. Η Ακαδημία είχε ιδρυθεί το 1725 από την Αικατερίνη την Α΄, τη χήρα του Μεγάλου Πέτρου, που ακολούθησε τα σχέδια του άντρα της, ο οποίος με τη σειρά του είχε ακολουθήσει τη συμβουλή του Leibniz. Την επόμενη χρονιά από την ίδρυσή της ο Euler δέχτηκε μια πρόσκληση των αδερφών Bernoulli για μια θέση στην Ακαδημία. Η θέση που προορίζονταν γι αυτόν ήταν στον τομέα της ιατρικής και της φυσιολογίας. Ετσι ο Euler μελέτησε φυσιολογία στη Βασιλεία παρακολουθώντας διαλέξεις στην Ιατρική. Τέλος ο Euler προσελήφθη στην Πετρούπολη το 1727 ως συνεργάτης του ιατρικού τομέα της Ακαδημίας.

2.2 Τα πρώτα χρόνια στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης: 1727-1741

Η σταδιοδρομία του Euler στη Ρωσία δεν ξεκίνησε με τους καλύτερους οιωνούς. Τη χρονιά που έφτασε στην Αγία Πετρούπολη, πέθανε η Αικατερίνη η Α΄ και ο Πέτρος ο Β΄ που πήρε τη θέση της δεν έδειχνε ενδιαφέρον για τις υποθέσεις της Ακαδημίας. Οι συντηρητικοί Ρώσοι ευγενείς που είχαν αναλάβει την εποπτεία του δωδεκάχρονου Πέτρου, ήταν εναντίον της Ακαδημίας καθώς την έβλεπαν σαν φορέα εισβολής των ξένων επιστημόνων που προέρχονταν από τη Γερμανία, την Ελβετία και τη Γαλλία. Ετσι το πρώτο εκείνο διάστημα ο Euler αναγκάστηκε να καταταγεί στο ρωσικό ναυτικό με το βαθμό του υπολοχαγού για να λύσει το βιοποριστικό του πρόβλημα. Από εκεί απέκτησε γνώσεις γύρω από την κατασκευή και τη λειτουργία των πλοίων και αργότερα έγινε αυθεντία στη ναυτική επιστήμη. Η βασιλεία του Πέτρου του Β΄ δεν κράτησε πολύ. Μετά το θάνατό του, τον Φεβρουάριο του 1730, στο θρόνο ανέβηκε η Αννα η Α΄. Κατά τη διάρκεια της βασιλείας της οι επιστήμες ξαναβρήκαν τη χαμένη τους αίγλη. Εν τω μεταξύ μέσα στη σύγχυση των ημερών και μετά το θάνατο του Nicolaus Bernoulli από πνιγμό, ο Euler ανέλαβε τη θέση αναπληρωτή καθηγητή Μαθηματικών. Το 1730, ο Herman μαθηματικός που γεννήθηκε στη Βασιλεία το 1678 και εργαζόταν στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης ως καθηγητής της Φυσικής, επέστρεψε στην πατρίδα του έτσι η χηρεύουσα θέση του καθηγητή της Φυσικής δόθηκε στον Euler. Οταν τρία χρόνια μετά ο Daniel Bernoulli επέστρεψε κι αυτός στην πατρίδα του για να γίνει καθηγητής Ανατομίας και Βοτανικής, ο Euler επιτέλους κατέλαβε την έδρα των Μαθηματικών. Κι ήταν μόλις είκοσι έξι χρονών. Κατά τη διάρκεια αυτών των πρώτων χρόνων του στη Ρωσία ο Euler έμεινε στο σπίτι του Daniel Bernoulli. Ετσι η αναχώρηση του Daniel ήταν μεγάλη απογοήτευση για τον Euler που είχε συνδεθεί μαζί του στενά σε προσωπικό αλλά και επιστημονικό επίπεδο.

Παρά την απογοήτευσή του για το φίλο που έφυγε, η έδρα των Μαθηματικών ήταν πια δική του. Μια τέτοια επαγγελματική και ακαδημαϊκή ανέλιξη έκανε τον Euler να νιώσει ασφαλής. Η Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης ήταν κατ' ουσία ένας ερευνητικός οργανισμός που πλήρωνε αδρά τα μέλη της για να παράγουν επιστημονική έρευνα. Ο Euler ήταν αφοσιωμένος στην έρευνα και ταυτόχρονα ήταν υποχρεωμένος να δημοσιεύει τις μελέτες του και να βοηθάει την κυβέρνηση της τσαρίνας και αργότερα του τσάρου σε όποιο ζήτημα προέκυπτε. Με τον καιρό έγινε επιστημονικός σύμβουλος της κυβέρνησης. Ετοίμαζε χάρτες, επέβλεπε το κυβερνητικό τμήμα της γεωγραφίας, έγραψε τα στοιχειώδη μαθηματικά εγχειρίδια για τα σχολεία της Ρωσίας, βοήθησε στην αναμόρφωση του συστήματος των μέτρων και των σταθμών και επινόησε πρακτικά μέτρα για τον έλεγχο των κλιμάκων, συμβούλευε το ρωσικό ναυτικό, μελετούσε ναυπηγική και αξιολογούσε έως και μηχανές πυρόσβεσης. Εκείνα τα χρόνια ήταν πολύ παραγωγικά για τον Euler. Οι συνάδελφοί του στην Ακαδημία ήταν στην πλειοψηφία τους πρώτης τάξεως επιστήμονες και οι συνθήκες εργασίας που του πρόσφερε η Ακαδημία ήταν εξαιρετικές. Σε ένα γράμμα του το 1749 έγραφε:

«...*εγώ και άλλοι που είχαμε την ευτυχία να βρεθούμε στη Ρωσική Ακαδημία δεν μπορούμε να μην αναγνωρίσουμε πως γίναμε αυτό που είμαστε χάρη στις θαυμάσιες συνθήκες που επικρατούσαν εκεί*...»

Οι συνθήκες ήταν ευνοϊκές κι έτσι ο Euler παντρεύτηκε το 1733 την Katherina Gsell, την κόρη ενός Ελβετού ζωγράφου που εργαζόταν στην Ακαδημία. Η Κατερίνα και ο Euler έζησαν μαζί, μέχρι και το θάνατό της (1773), σαράντα ευτυχισμένα και γόνιμα χρόνια και απέκτησαν δεκατρία παιδιά, από τα οποία μόνο πέντε επιβίωσαν έως την ενηλικίωση και μόνο τρία έζησαν περισσότερο από τους γονείς τους. Για να στεγάσει την οικογένειά του ο Euler αγόρασε ένα σπίτι στις όχθες του ποταμού Νέβα, κοντά στην Ακαδημία. Παρόλα αυτά η ακαδημαϊκή ζωή του δεν ήταν ανέμελη. Λόγω της πολιτικής αναταραχής που βρίσκονταν η χώρα, κατά καιρούς υπήρξε έλλειψη ανοχής στις διαφορετικές φωνές και μια αυξανόμενη καχυποψία στους ξένους. Ο ίδιος ο Euler, όντας ξένος μέσα στην Ακαδημία όπως και πολλοί άλλοι άλλωστε, χαρακτήριζε τη θέση του ως «μάλλον άχαρη».

Ευτυχώς η αυξανόμενη αίγλη του Euler στο μαθηματικό κόσμο βοήθησε να ξεπεραστούν τα εμπόδια και να αναδειχθεί ο κορυφαίος επιστήμονας στους κόλπους της Ακαδημίας. Τούτα τα παραγωγικά χρόνια η διάνοια του Euler έλαμψε και η δουλειά του επεκτάθηκε σε πολλούς τομείς. Μελέτησε θέματα όπως η θεωρία των αριθμών, οι άπειρες σειρές, η ανάλυση των μεταβλητών και κατόπιν ασχολήθηκε με την εφαρμογή τους σε διάφορους κλάδους όπως η μουσική, η χαρτογραφία, η ναυπηγική κ.α. Συνολικά ετοίμασε γύρω στις 100 δημοσιεύσεις για διάφορα ζητήματα. Μια από τις σπουδαιότερες εργασίες του αυτή την περίοδο ήταν η πραγματεία του πάνω στη Μηχανική (Mechanica, sive Motus Scientia analytice exposita, 1736). Ο Euler, σε αυτό το έργο, ήταν ο πρώτος που εισήγαγε αλγεβρικές και αναλυτικές μεθόδους στη μηχανική, σπάζοντας έτσι την παράδοση του Νεύτωνα και των σύγχρονών του που επέμεναν στις γεωμετρικές μεθόδους. Η πραγματεία του Euler, δημοσιευμένη περίπου έναν αιώνα μετά τη δημοσίευση της Αναλυτικής Γεωμετρίας του Καρτέσιου, έκανε στη Μηχανική ό,τι ο Καρτέσιος στη Γεωμετρία: την ελευθέρωσε από τα δεσμά της συνθετικής παρουσίασης και την έκανε αναλυτική. Δίκαια το έργο θεωρήθηκε ορόσημο στην ιστορία της φυσικής. Την ίδια περίοδο θα δημοσιευτούν δύο τόμοι πάνω στις Ναυτικές Επιστήμες (Scientia navalis) που περιελάμβαναν μελέτες για την υδροδυναμική, τη ναυπηγική και τη ναυσιπλοΐα. Αυτή η τεράστια παραγωγή, που αναλυτικότερα θα δούμε στην ενότητα που είναι αφιερωμένη στο έργο του, προκάλεσε σοβαρά προβλήματα στην υγεία του επιστήμονα με αποτέλεσμα το 1738 να χάσει το φως του από το δεξί μάτι. Λέγεται πως σχολιάζοντας το πρόβλημα είπε «αυτό σημαίνει λιγότερος περισπασμός» και συνέχισε να εργάζεται με τους ίδιους σκληρούς ρυθμούς.

2.3 Τα χρόνια στο Βερολίνο: 1741-1766

Η βασιλεία της τσαρίνας Αννας δεν κράτησε πολύ. Μετά το θάνατό της, το 1740, τη διαδέχτηκε στο θρόνο η Ελισάβετ, κόρη του Πέτρου του Α΄, ύστερα από πραξικόπημα εναντίον του τσάρου Ιβάν που είχε βασιλεύσει στη χώρα για λίγο. Η πολιτική αναταραχή και η ξενοφοβία που επικρατούσε στη χώρα εντάθηκαν και δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε πως η κατάσταση ήταν ακόμα και επικίνδυνη για τους ξένους. Εκείνη την περίοδο ο Euler πήρε ένα γράμμα από τον βασιλιά Φρειδερίκο το Μέγα της Πρωσίας που τον καλούσε να διευθύνει το μαθηματικό τμήμα της Πρωσικής Ακαδημίας των Επιστημών. Ετσι το 1741 έφυγε από την Αγία Πετρούπολη για το Βερολίνο. Στην Ακαδημία του Βερολίνου επρόκειτο να μείνει για εικοσιπέντε χρόνια, έως ότου επιστρέψει ξανά πίσω στη Ρωσία. Η Ακαδημία του Βερολίνου όφειλε την έμπνευση της δημιουργίας της στο Leibniz. Κατά τη διάρκεια, όμως, της βασιλείας του Φρειδερίκου του Α΄, ενός ανθρώπου αμαθούς και άξεστου, η Ακαδημία παραμελήθηκε. Με το θάνατό του το 1740 και την ανάληψη της εξουσίας από το Φρειδερίκο το Μέγα η Ακαδημία απέκτησε ξανά ζωή. Ο νέος βασιλιάς επιθυμούσε να προστατεύσει τους εργάτες των γραμμάτων και των επιστημών και να δώσει κύρος στην Ακαδημία. Για το λόγο αυτό συγκέντρωσε στους κόλπους της πολλούς και εκλεκτούς επιστήμονες της εποχής.

Στο Βερολίνο ο Euler ήταν αρκετά ευκατάστατος όπου αγόρασε σπίτι και μια φάρμα στο Charlottenburg. Ο μισθός που του χορηγείτο από την Πρωσική κυβέρνηση ήταν περίπου 1600 τάλιρα ετησίως ενώ πληρωνόταν και από την Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης καθώς παρέμενε μέλος της, καθ' όλη τη διάρκεια της παραμονής του στο Βερολίνο. Στην πραγματικότητα ο Euler έστελνε τις μισές του μελέτες για δημοσίευση στη Ρωσική Ακαδημία, έγραφε σημαντικά βιβλία με αφορμή αυτή τη συνεργασία, συμβούλευε την Ακαδημία σε θέματα επιστημονικού ενδιαφέροντος και γενικότερα λειτουργούσε σαν αντιπρόσωπός της στο Δυτικό κόσμο. Τη χρονιά, βέβαια, που έφτασε στην Πρωσία ήταν σε εξέλιξη ο πρώτος πόλεμος της Σιλεσίας. Ο αυτοκράτορας ήταν αφοσιωμένος στον πόλεμο και ως εκ τούτου η αναδιοργάνωση και λειτουργία της Ακαδημίας καθυστερούσε. Μην έχοντας ο Euler άλλα καθήκοντα, ανέλαβε να παραδίδει ιδιαίτερα μαθήματα σε μέλη βασιλικών οικογενειών. Μαθητές του υπήρξαν τα παιδιά του δούκα της Βυρτεμβέργης και αργότερα η πριγκίπισσα Φιλιππίνα Von Schwendt, ανιψιά του βασιλιά της Πρωσίας. Οταν τα μαθήματα τελείωσαν, μετά το 1760, ο Euler αποφάσισε να τα εκδώσει. Ετσι γεννήθηκε το σπουδαίο του έργο Γράμματα σε μια Γερμανίδα Πριγκίπισσα που απέκτησε τεράστια δημοτικότητα και μεταφράστηκε σε επτά γλώσσες. Τα Γράμματα ήταν οι παραδόσεις των μαθημάτων του προς την πριγκίπισσα σε τομείς όπως η Μηχανική, η Φυσική, η Οπτική, η Αστρονομία, η θεωρία Ηχου, η Μεταφυσική, η Ηθική, ακόμα και η Λογική. Στο κυρίως μέρος του έργου ο Euler απαντάει σε ερωτήματα όπως: γιατί κάνει κρύο στην κορυφή ενός ψηλού βουνού στις τροπικές χώρες, γιατί το φεγγάρι φαίνεται μεγαλύτερο όταν ανατέλλει και γιατί ο ουρανός είναι μπλε. Στην αμερικάνικη έκδοση του 1833 ο εκδότης έγραφε στον πρόλογο:

«*Η ευχαρίστηση του αναγνώστη συνυπάρχει σε κάθε βήμα της εξέλιξης καθώς κάθε προσέγγιση στη γνώση που ακολουθεί γίνεται πηγή ολοένα και μεγαλύτερης ικανοποίησης*».

Το έργο παραμένει ακόμα και σήμερα ένα από τα πιο χαρακτηριστικά δείγματα εκλαϊκευμένης επιστήμης.

Ενώ η εναρκτήρια συνεδρίαση της Ακαδημίας καθυστερούσε, ο Euler καθώς και άλλοι διανοούμενοι της εποχής που κατοικούσαν στο Βερολίνο δημιούργησαν μια ιδιωτική Εταιρία, η οποία για λίγους μήνες πρόσφερε επιστημονικό βήμα στους επιστήμονες. Ο ίδιος ο Euler δημοσίευσε πέντε εργασίες του στα Βερολίνεια Ανάλεκτα (Miscellanea Berolinensia) που ήταν το περιοδικό δελτίο της Εταιρίας. Ο βίος της Εταιρίας έμελλε να είναι βραχύβιος καθώς τον Ιανουάριο του 1744 ξεκίνησε επιτέλους η λειτουργία της Ακαδημίας του Βερολίνου, η οποία αποφάσισε να εκδίδει ένα ετήσιο δελτίο με τον τίτλο Ιστορία της Ακαδημίας των Επιστημών και των Γραμμάτων του Βερολίνου. Η νέα Ακαδημία, ακολουθώντας τα ίχνη των άλλων μεγάλων Ακαδημιών της εποχής, διοργάνωνε δημόσιους διεθνείς διαγωνισμούς. Σε έναν από αυτούς το θέμα του διαγωνισμού ήταν η κριτική της Μοναδολογίας του Leibniz, της φιλοσοφικής του θεωρίας για τις Μονάδες. Ο Euler παρότι, λόγω της θέσης του στην Ακαδημία, επρόκειτο να είναι μέλος της κριτικής επιτροπής, δεν άντεξε στον πειρασμό κι έγραψε μια μελέτη στα Γερμανικά ενάντια στη θεωρία του Leibniz. Αν και το δημοσίευμα ήταν ανώνυμο, όλοι κατάλαβαν τον συγγραφέα και επέκριναν τη στάση του. Στο Βερολίνο ο Euler έφτασε στο απόγειο της καριέρας του. Στην Ακαδημία του Βερολίνου δημοσίευσε περισσότερα από 125 άρθρα του για τα Μαθηματικά και τη φυσική ενώ στη Ρωσία έστειλε άλλα 100. Ηταν ακούραστος και η δημιουργικότητά του φαίνεται πως δεν είχε προηγούμενο. Το 1748 δημοσίευσε την πραγματεία του για την ανάλυση, "Introductio in analysin infinitorum", στην οποία εξέθεσε με μεγαλοπρεπή τρόπο τη θεωρία του για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις εφαρμογές τους. Αυτό το βιβλίο υπήρξε ορόσημο για την ανάλυση και κυριάρχησε στο χώρο για περισσότερο από έναν αιώνα. Ακόμα και σήμερα η ανάγνωσή του είναι γοητευτική. Το 1744 δημοσιεύτηκε μια μονογραφία του στο Λογισμό των μεταβολών (Methodus inveniendi lineas curves maximi minimive proprietate gaudentes) που είχε ξεκινήσει να γράφεται την εποχή που βρίσκονταν στην Αγία Πετρούπολη και το 1765 δημοσιεύτηκε η πραγματεία του για τη Μηχανική των στερεών σωμάτων (Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum). Φυσικά, όπως συνέβη και στη Ρωσία, ο Euler ήταν επιφορτισμένος και με καθήκοντα που σχετίζονταν με τις ανάγκες του αυτοκράτορα και της επικράτειας γενικότερα. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια ασχολήθηκε, μεταξύ άλλων, με το νομισματικό σύστημα, το αποχετευτικό σύστημα, τα κανάλια ναυσιπλοΐας και το συνταξιοδοτικό σύστημα. Κι ενώ φαίνεται πως ο Φρειδερίκος ο Μέγας κατανοούσε την ανάγκη της ανάπτυξης των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους, δεν ήξερε τίποτα από Μαθηματικά και μάλλον τα περιφρονούσε. Ο αυτοκράτορας θεωρούσε τον εαυτό του έναν πολυμαθή πνευματώδη σοφό που αγαπούσε τη φιλοσοφία, την ποίηση και οτιδήποτε γαλλικό. Δεν είναι συμπτωματική η προτίμησή του σε προσωπικότητες όπως ο Voltaire και ο d' Alembert και η απαξίωσή του προς το πρόσωπο του Euler. Χαρακτηριστικό είναι ότι οι υποθέσεις της Ακαδημίας διεξάγονταν στα Γαλλικά και όχι στα Γερμανικά. Για το βασιλιά ο Euler ήταν ένας άξεστος που δε γνώριζε τίποτα από φιλοσοφία. Ο Voltaire, που περνούσε μεγάλο μέρος του χρόνου του κολακεύοντας τον Φρειδερίκο, έδειχνε να βρίσκει μεγάλη ευχαρίστηση στο να εμπλέκει τον Euler σε φιλοσοφικές συζητήσεις στις οποίες ήταν δύσκολο να ανταποκριθεί, δεδομένου ότι αφορούσαν ζητήματα που δεν γνώριζε. Παρόλα αυτά ο Euler τα δεχόταν όλα με ευχαρίστηση και γελούσε μαζί με τους άλλους για τις γκάφες του. Οι σχέσεις του Euler και του βασιλιά συνεχώς επιδεινώνονταν. Το γεγονός, όμως, που καθόρισε τις σχέσεις τους ήταν άλλο. Οταν ξεκίνησε τη λειτουργία της η Ακαδημία, ο βασιλιάς διόρισε διευθυντή της τον Maupertius, έναν επιστήμονα μικρότερου βεληνεκούς από τον Euler. Ο τελευταίος, όπως ήταν αναμενόμενο λόγω του χαρακτήρα του, είχε θερμές σχέσεις με το διευθυντή και ενδιαφερόταν πραγματικά για τις υποθέσεις του ιδρύματος. Μετά το θάνατο του Maupertius, το 1759, και για διάστημα τεσσάρων ετών, ο ουσιαστικός διευθυντής της Ακαδημίας ήταν ο Euler, αν και δεν είχε τοποθετηθεί επίσημα. Ο Φρειδερίκος όχι μόνο δεν του πρόσφερε τη θέση αλλά φάνηκε να μελετά το διορισμό του d' Alembert. Ο τελευταίος προσκλήθηκε στο Βερολίνο και, παρόλο που υπήρχε μια παλιά ψυχρότητα ανάμεσα σε αυτόν και τον Euler για κάποια μαθηματική αιτία, δήλωσε ξεκάθαρα στον βασιλιά ότι θα ήταν βλασφημία να βάλει άλλον μαθηματικό πάνω από τον Euler. Απέρριψε την προσφορά του βασιλιά κι έφυγε. Μετά από αυτό, ο Euler άρχισε να σκέφτεται την αποχώρησή του από την Ακαδημία. Ετσι, έγραψε στο γραμματέα της Ακαδημίας της Αγίας Πετρούπολης εκφράζοντας του την επιθυμία του να επιστρέψει. Σε αυτή του την απόφαση συνέβαλε το ότι η πολιτική κατάσταση στη Ρωσία είχε σταθεροποιηθεί, μετά την άνοδο της Αικατερίνης Β΄, ή Μεγάλης Αικατερίνης, όπως ονομάστηκε, για το έργο της και την προσφορά της στη χώρα. Ηταν μια έξυπνη και καλλιεργημένη γυναίκα που έδωσε ώθηση στις επιστήμες και έκανε τη Ρωσία μια μεγάλη πολιτική και στρατιωτική ευρωπαϊκή δύναμη. Στις μέρες της άνθησε και ξαναβρήκε την παλιά της αίγλη η Ακαδημία των Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης. Εδωσε, λοιπόν, εντολή στον πρέσβη της χώρας της στην Πρωσία να κάνει μια προσφορά στον Euler και να δεχτεί όλους τους όρους που πιθανόν έθετε ο επιστήμονας. Ετσι άνοιξε ο δρόμος για την επιστροφή του. Ο επιστήμονας μαζί με την οικογένειά του και αρκετούς βοηθούς του ταξίδεψε για τη Ρωσία, κάνοντας μια μικρή στάση περίπου δύο μηνών στην Πολωνία όπου ο βασιλιάς Stanislas, ένας παλιός εραστής της Αικατερίνης, τον υποδέχτηκε με τιμές και εγκαρδιότητα. Ο Euler επέστρεψε, τελικά, στην Αγία Πετρούπολη ως ήρωας παγκοσμίου φήμης και σεβασμού.

2.4 Η δεύτερη περίοδος στην Αγία Πετρούπολη μέχρι το θάνατό του: 1766-1783.

Οι τιμές υποδοχής που του έγιναν ήταν μεγάλες, επισκιάστηκαν, όμως, από την είδηση για το ναυάγιο του πλοίου που μετέφερε τα πράγματά τους. Η αντίδραση της Αικατερίνης ήταν άμεση. Του παρέδωσε ένα πλήρως εξοπλισμένο σπίτι, για να στεγάσει τη δεκαοχταμελή οικογένειά του, και του παραχώρησε μία από τις μαγείρισσές της.

Η καινούρια αρχή, όμως, έκρυβε κι άλλες συμφορές. Ενώ ο Euler εργαζόταν αδιάκοπα μια σοβαρή ασθένεια του προκάλεσε απώλεια όρασης κι από το άλλο του μάτι. Μπορούσε τώρα να δει μόνο πολύ μεγάλους χαρακτήρες. Ευτυχώς, προαισθανόμενος την εξέλιξη της όρασής του, είχε εξασκηθεί στο γράψιμο μαθηματικών τύπων σε μια μεγάλη πλάκα που είχε προσαρμόσει στο γραφείο του. Ετσι όταν πια έχασε την όρασή του έγραφε τους μαθηματικούς τύπους που ήθελε στην πλάκα και υπαγόρευε στους βοηθούς του τις μαθηματικές φράσεις που εξηγούσαν τους τύπους. Οι ρυθμοί της δουλειάς του δεν έπεσαν καθόλου μετά την τύφλωσή του. Θα έλεγε κανείς πως αυξήθηκαν. Σε αυτό τον βοήθησε σημαντικά η τεράστια μνήμη που διέθετε καθώς και η δυνατότητα που είχε να κάνει πολύπλοκους υπολογισμούς με το μυαλό. Ηξερε απ' έξω την Αινειάδα του Βιργίλιου και, παρόλο που σπάνια είχε ξανακοιτάξει το βιβλίο από τότε που ήταν νέος, μπορούσε να απαγγείλει στίχους της. Ο Condorcet αναφέρει το εξής παράδειγμα για να μνημονεύσει την καταπληκτική μνήμη του Euler:

«*...δύο μαθητές του Euler που είχαν υπολογίσει το άθροισμα των δεκαεπτά όρων μιας πολύπλοκης συγκλίνουσας σειράς –για μια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής- διαφώνησαν μεταξύ τους για μια μονάδα στο πεντηκοστό ψηφίο του αποτελέσματος. Για να αποφασίσει ο Euler έκανε όλο τον υπολογισμό με το μυαλό του. Η απάντησή του ήταν όντως η σωστή*».

Παρόλα αυτά, θα πρέπει να ήταν δύσκολο για τον Euler να στηρίζεται στους άλλους για να κάνει τους υπολογισμούς του. Σε ένα συγκινητικό του γράμμα προς τον Lagrange, έγραφε:

«*Μου έχουν διαβάσει όλους τους υπολογισμούς σου που αφορούν την εξίσωση $101 = p^2 - 13q^2$ και έχω πειστεί εντελώς για την αξία τους. Αλλά καθώς είμαι ανίκανος να διαβάσω ή να γράψω, πρέπει να ομολογήσω πως η φαντασία μου δεν μπόρεσε να παρακολουθήσει ούτε τους συλλογισμούς σου στα βήματα που ακολούθησες ούτε να κρατήσει στη μνήμη τη σημασία των συμβόλων που χρησιμοποίησες. Είναι αλήθεια πως παρόμοιες διερευνήσεις στο παρελθόν μου ήταν πολύ ευχάριστες και ξόδευα πολύ χρόνο γι αυτές. Τώρα, όμως, μπορώ να ασχοληθώ μόνο με ότι μπορώ να κρατήσω στο μυαλό μου και συχνά αναγκάζομαι να βασιστώ σε κάποιους φίλους για να κάνουν τους υπολογισμούς που έχω σχεδιάσει...*».

Στην αλληλογραφία του Lagrange, του d' Alembert και άλλων κορυφαίων μαθηματικών της εποχής εκφράζεται η ανησυχία και η συμπάθειά τους για την αναπηρία του. Ο ίδιος όμως δεν το βάζει κάτω. Ενα λαμπρό παράδειγμα των υπολογισμών του νου του είναι η ανάλυση που έκανε στο πρόβλημα της κίνησης της Σελήνης. Η σεληνιακή θεωρία, που προξενούσε πονοκέφαλο στο Νεύτωνα, αναλύθηκε διεξοδικά από τον Euler την εποχή που μπορούσε να χρησιμοποιεί για τους υπολογισμούς του μόνο το μυαλό του. Ποτέ άλλοτε η καταπληκτική του μνήμη δεν τον βοήθησε τόσο όσο την εποχή που έβλεπε τα Μαθηματικά με τα μάτια του μυαλού του μόνο. Τα υπόλοιπα βιβλία που υπαγόρευσε στους βοηθούς του αυτήν την περίοδο είναι: το έργο του Dioptrica, το μνημειώδες τρίτομο έργο για τον Ολοκληρωτικό Λογισμό με τίτλο "Institutiones calculi integralis" και η πραγματεία του για την Αλγεβρα με τον τίτλο "Vollstandige Anleitung zur Algebra". Στα πρώτα χρόνια της δεύτερης περιόδου του Euler στη Ρωσία αναφέρεται και το παρακάτω γεγονός που, εκτός των άλλων, τονίζει την ακλόνητη θρησκευτική του πίστη. Οταν ο Diderot, προσκεκλημένος της Μεγάλης Αικατερίνης, επισκέφτηκε το παλάτι της Ρωσίας προσπάθησε να μυήσει τους αυλικούς της βασίλισσας στον αθεϊσμό. Η Αικατερίνη θέλοντας να σταματήσει τη μετάδοση αθεϊστικών ιδεών στην αυλή της παρακάλεσε τον Euler να τη βοηθήσει, πράγμα εύκολο γιατί τα Μαθηματικά ήταν σαν κινέζικα για το φιλόσοφο Diderot. O De Morgan στο κλασσικό βιβλίο του Ο σάκος με τα παράδοξα (1872) αναφέρει:

«*Ο Diderot πληροφορήθηκε πως ένας σοβαρός μαθηματικός κατείχε μια αλγεβρική απόδειξη της ύπαρξης του Θεού και θα την παρουσίαζε μπροστά σε όλη την αυλή, αν ήθελε να την ακούσει (ο Diderot). Ο φιλόσοφος συγκατένευσε ευχαρίστως... ο Euler προχώρησε προς το μέρος του και είπε με σοβαρότητα και με απόλυτη σιγουριά: «Κύριε,* $\frac{a+b^n}{n} = x$ *, συνεπώς υπάρχει Θεός. Αποκριθείτε!*»

Τα γέλια που ακολούθησαν σκέπασαν τη στενάχωρη σιωπή του φιλοσόφου που ζήτησε από την αυτοκράτειρα την άδεια να επιστρέψει στη Γαλλία. Ετσι ο Euler κατάφερε έστω και καθυστερημένα να δώσει τη δική του απάντηση στους Γάλλους φιλοσόφους που υποτιμούσαν το έργο του. Πριν ακόμα περάσουν έξι χρόνια από την επιστροφή του Euler στη Ρωσία ένα ακόμα δυσάρεστο γεγονός σημάδεψε τη ζωή της οικογένειάς του. Στη μεγάλη πυρκαγιά του 1771 το σπίτι του καθώς και ολόκληρη η επίπλωσή του κάηκαν. Ο ίδιος σώθηκε από θαύμα χάρη στον ηρωισμό του Ελβετού υπηρέτη του Peter Grimm (ή Grimmon) που τον έβγαλε μέσα από τις φλόγες. Κι ενώ η βιβλιοθήκη δεν γλίτωσε την καταστροφή, ευτυχώς τα χειρόγραφά του, χάρη στις έγκυρες ενέργειες του κόμη Orloff, σώθηκαν. Η οικογένεια, οι φίλοι καθώς και οι αφοσιωμένοι μαθητές του στάθηκαν στο πλευρό του για να μπορέσει να συνεχίσει το επιστημονικό του έργο. Η αυτοκράτειρα αποκατέστησε τη ζημιά και η ζωή συνεχίστηκε. Το 1773, όμως, ένα νέο χτύπημα τον βρήκε. Τη χρονιά που ο Euler έγινε εξήντα έξι χρονών, πέθανε η γυναίκα του, Κατερίνα. Τρία χρόνια αργότερα παντρεύτηκε την Salome Abigail Gsell, ετεροθαλή αδερφή της γυναίκας του, κι έζησε μαζί της μέχρι το θάνατό του. Ο Euler πέθανε στις

18 Σεπτεμβρίου 1783 από εγκεφαλική αιμορραγία. Μέχρι να αφήσει και την τελευταία του πνοή κυριολεκτικά εργαζόταν. Εκείνη την ημέρα έκανε παρέα με τα εγγόνια του και μετά ασχολήθηκε με ερωτήματα που σχετίζονταν με την πτήση των μπαλονιών. Το απόγευμα της ίδιας μέρας δούλεψε με τους βοηθούς του πάνω στην τροχιά του πρόσφατα ανακαλυφθέντος πλανήτη Ουρανού. Η εσωτερική αιμορραγία που υπέστη προκάλεσε τον άμεσο θάνατό του. Αφού τον πένθησαν η οικογένειά του, οι συνάδελφοί του και ολόκληρη η επιστημονική κοινότητα οδηγήθηκε στην τελευταία του κατοικία. Ενας μεγάλος επιστήμονας θα έμενε για πάντα στην ιστορία.

2.5 Λίγα λόγια για το έργο του

Τα χρόνια που προηγήθηκαν της μαθηματικής σταδιοδρομίας του Euler η μαθηματική και φυσική επιστήμη είχε λύσει έναν τεράστιο αριθμό μεμονωμένων προβλημάτων με στόχο την ενοποίηση. Ομως δεν είχε γίνει ακόμα μια συστηματική επιχείρηση ενοποίησης όλων των Μαθηματικών, καθαρών και εφαρμοσμένων. Η Αναλυτική Γεωμετρία, που εγκαινιάστηκε το 1637, χρησιμοποιούνταν ήδη περίπου εννιά δεκαετίες, ο Λογισμός περίπου πέντε και ο Νευτώνειος νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας ήταν γνωστός τα τελευταία σαράντα χρόνια. Οι ισχυρές αναλυτικές μέθοδοι του Descartes, του Newton και του Leibniz που συνδέονταν με τη Μηχανική και τη Γεωμετρία δεν είχαν γίνει ακόμα πεδίο εξαντλητικής μελέτης και έρευνας. Κι ενώ η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός ήταν ακόμα στην παιδική τους ηλικία, ο Euler κατανόησε γρήγορα τις μεθόδους τους και έκανε αλλαγές, ενίοτε δε και τελειοποιήσεις, που εφάρμοσε σε πολλά πεδία των θετικών επιστημών. Επιπλέον συστηματοποίησε και ενοποίησε διασκορπισμένα μερικά αποτελέσματα και απομονωμένα θεωρήματα δίνοντας έτσι πολύτιμες ανακαλύψεις. Χαρακτηριστικό είναι ότι και σήμερα ακόμα ένα μεγάλο μέρος της ύλης των Μαθηματικών που διδάσκεται στο σχολείο βρίσκεται ουσιαστικά στο επίπεδο της επεξεργασίας του Euler. Η παρουσίαση των κωνικών τομών, για παράδειγμα, και των τετραγωνικών επιφανειών στον χώρο των τριών διαστάσεων από την άποψη της γενικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού είναι δική του. Ο Euler δημιούργησε, κυριολεκτικά, νέους κλάδους των Μαθηματικών όπως η συνδυαστική τοπολογία (combinatorial topology), η θεωρία γραφημάτων (graph theory), ο λογισμός των μεταβολών (calculus of variations) και η Τοπολογία (topology). Ηταν ο ιδρυτής της σύγχρονης αποτύπωσης του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού (modern differential and integral calculus) και στα βιβλία του παρουσίασε την Αλγεβρα και το λογισμό με τις εφαρμογές τους σε ολόκληρες γενιές σπουδαστών. Χωρίς υπερβολή θα μπορούσαμε να πούμε πως πέτυχε στην ανάλυση αυτό που ο Ευκλείδης πέτυχε στη Γεωμετρία. Επιπλέον έβαλε τα θεμέλια της θεωρίας των αριθμών ως ιδιαίτερου κλάδου των Μαθηματικών, μια διαδικασία που ολοκληρώθηκε από τον Gauss με την έκδοση του μνημειώδους έργου του “Disquisitiones Arithmeticae”. Ακολουθεί μια λίστα με τα αντικείμενα που απασχόλησαν τον Euler, στα περισσότερα από τα οποία οι μελέτες του ήταν πρωτοπόρες: Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός Λογαριθμικές, εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις, Διαφορικές εξισώσεις και μερικές διαφορικές εξισώσεις, Ελλειπτικές συναρτήσεις και ολοκληρώματα, Υπεργεωμετρικά ολοκληρώματα, Ευκλείδεια Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών, Αλγεβρα, Συνεχή κλάσματα, Ζήτα γινόμενα, Απειρες σειρές και γινόμενα, Αποκλίνουσες σειρές, Μηχανική σωματιδίων, Μηχανική στερεών σωμάτων, Λογισμός μεταβολών, Οπτική (θεωρία και εφαρμογές), Υδροστατική, Υδροδυναμική, Αστρονομία, Κίνηση σελήνης και πλανητών, Τοπολογία, Θεωρία γραφημάτων.

2.5α′ Η χαρτογραφία στο έργο του Euler

Κατά τον δέκατο όγδοο αιώνα, η χερσαία χαρτογραφία αποτελούσε πολύ σημαντικό αντικείμενο. Η ασχολία του Euler με τη χαρτογραφία ξεκίνησε το 1735 όταν του ανατέθηκε από τη Σύγκλητο της Ρωσικής Ακαδημίας η επίβλεψη της εκπόνησης χαρτών για τη δεύτερη εξερευνητική εκστρατεία της Kamchatka. Συνεργάστηκε με τον Delisle, ο οποίος βελτίωσε τις προβολές του Πτολεμαίου για την απεικόνιση της σφαίρας στο επίπεδο, αναπτύσσοντας μια ισοσκελισμένη κωνική προβολή με σταθερή παράλληλη τοποθέτηση όλων των μεσημβρινών, το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος παράγουν τις συντεταγμένες ενός σημείου. Ο Euler συμφώνησε με αυτού του τύπου την αποτύπωση διότι παρείχε μεγαλύτερη ακρίβεια. Για ένα ολόκληρο έτος ο Euler και ο Delisle μελετώντας επιμέρους χάρτες, εργάστηκαν για τη δημιουργία ενός χάρτη που απεικόνιζε τα σύνορα της Ρωσικής Αυτοκρατορίας. Ο Euler μετέπειτα εργάστηκε στη δημιουργία ενός άτλαντα της Ρωσικής Αυτοκρατορίας όπου υπήρχαν επιμέρους γεωγραφικοί χάρτες των 19 επαρχιών της (Calinger, 2016).

Το 1741, παρουσιάστηκε στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης το έργο του «Methodus viri celeberrimi Leonhardi Euleri determinandi gradus meridiani pariter ac paralleli telluris, secundum mensuram a celeb. de Maupertuis cum sociis institutam» («Η Μέθοδος του διάσημου Leonhard Euler για τον προσδιορισμό ενός μεσημβρινού και ενός παραλλήλου της Γης που βασίστηκε στις μετρήσεις του διάσημου de Maupertuis και των συνεργατών του»). Η συγκεκριμένη εργασία δημοσιεύτηκε το 1750.

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης παραμονής του στην Αγία Πετρούπολη, τα έτη 1777 και 1778, δημοσίευσε τρία άρθρα, στον τόμο 1777 του περιοδικού Acta, σχετικά με τη χαρτογραφία, τα εξής:

i. De repraesentatione superficiei sphaericae super plano (Η αναπαράσταση των σφαιρικών επιφανειών στο επίπεδο)

ii. De proiectione geographica superficiei sphaericae (Οι γεωγραφικές προβολές των σφαιρικών επιφανειών)

iii. De proiectione geographica Deslisliana in mappa generali imperii russici usitata (Η γεωγραφική προβολή του Delisle, η οποία χρησιμοποιήθηκε στο σχεδιασμό του χάρτη της Ρωσικής Αυτοκρατορίας)

Το πρώτο άρθρο περιλαμβάνει σημαντικά αποτελέσματα και τεχνικές εξετάζοντας τους γεωγραφικούς χάρτες υπό το πρίσμα του διαφορικού λογισμού και του λογισμού των μεταβολών. Στο άρθρο αυτό ο Euler αποδεικνύει ότι δεν υφίσταται «τέλεια» ή «ακριβής» χαρτογράφηση από τη σφαίρα στο επίπεδο παρά μόνον χάρτης που διατηρεί τις αποστάσεις (ως προς κάποιο παράγοντα) σε κάποια σειρά καμπυλών. Αυτό το αποτέλεσμα προέκυψε από τη μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Λαμβάνοντας υπόψη αυτό το αρνητικό συμπέρασμα, ο Euler θώρησε ότι για την πιο ακριβή χαρτογράφηση θα πρέπει να βρεθεί η καλύτερη δυνατή προσέγγιση. Εξέτασε διάφορες προβολές της σφαίρας αναζητώντας συστηματικά τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που να τις ικανοποιούν. Ετσι, επισήμανε του παρακάτω τρεις τύπους χάρτη:

- Χάρτες στους οποίους οι μεσημβρινοί είναι κάθετοι σε έναν συγκεκριμένο άξονα στο επίπεδο (οριζόντιος άξονας) και όλοι οι παράλληλοι τοποθετούνται κάθετα σ’ αυτόν.

- Χάρτες οι οποίοι διατηρούν τις ιδιότητες των μικρών απεικονίσεων, δηλαδή είναι σύμμορφοι.

- Χάρτες που η επιφάνειά τους αντιπροσωπεύεται στο πραγματικό της μέγεθος.

Ο Euler έδωσε παραδείγματα τέτοιων χαρτών, οι οποίοι κατασκευάζονταν με διάφορους τρόπους, όπως με την προβολή της σφαίρας σ’ ένα εφαπτόμενο επίπεδο, ενός εφαπτομένου στον ισημερινό κυλίνδρου κ.α. Κατόπιν μελέτησε τις παραμορφώσεις των αποστάσεων και των γωνιών των συγκεκριμένων χαρτών. Στο τέλος του άρθρου του αναφέρει ότι η συγκεκριμένη εργασία δεν έχει άμεση πρακτική χρήση.

Σε αντίθεση με το προηγούμενο άρθρο του, ο Euler στο δεύτερο άρθρο του μελέτησε προβολές οι οποίες είχαν πρακτική εφαρμογή.

Τέλος, στο τρίτο άρθρο της σειράς αυτής, ο Euler ανασκοπεί τις κύριες ιδιότητες της στερεογραφικής προβολής: οι παράλληλοι και οι μεσημβρινοί τέμνονται σε ορθές γωνίες και έτσι είναι σύμμορφοι. Στη συνέχεια όμως εκθέτει τα μειονεκτήματα αυτής της προβολής: υπάρχει μεγάλη παραμόρφωση των μηκών ιδιαίτερα όταν πρέπει κανείς να σχεδιάσει χάρτες μεγάλων περιοχών της Γης.

Ακολούθως, αναλύει τα πλεονεκτήματα του χάρτη που σχεδιάστηκε από τον Delisle και αναπτύσσει μαθηματική θεωρία για το συγκεκριμένο χάρτη. Το κύριο πλεονέκτημα του συγκεκριμένου χάρτη είναι ότι ενώ οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως ευθείες γραμμές, οι λοιποί μεγάλοι κύκλοι δεν αποκλίνουν σημαντικά από την ευθεία. Αυτή η υπόθεση εμφανίζεται ξανά, σχεδόν έναν αιώνα μετά, σε ένα άρθρο του Beltrami. Είναι η πρώτη φορά που συναντάται σε μαθηματικό άρθρο μια πρόωρη έννοια της «οιονεί γεωδαισίας». Στη συνέχεια, διερευνά με ποιο τρόπο διαφέρει η αποτύπωση ενός μεγάλου κύκλου στο χάρτη από μια ευθεία. Το συμπέρασμα του άρθρου, όπως αναφέρει ο Παπαδόπουλος στο [21] είναι το εξής:

Σε αυτή την προβολή αποκτάται το εξαιρετικό πλεονέκτημα, ότι οι ευθείες γραμμές, που πηγαίνουν από οποιοδήποτε σημείο σε οποιοδήποτε άλλο σημείο, αντιστοιχούν μάλλον ακριβώς στους μεγάλους κύκλους και συνεπώς οι αποστάσεις μεταξύ οποιονδήποτε θέσεων στο χάρτη μπορούν να μετρηθούν χρησιμοποιώντας την πυξίδα, χωρίς σημαντικό λάθος. Λόγω αυτών των σημαντικών χαρακτηριστικών η προβολή που συζητήθηκε προτιμήθηκε σε σχέση με άλλες για την κατασκευή του γενικού χάρτη της Ρωσικής Αυτοκρατορίας και υπό από αυστηρές προϋποθέσεις, διαφέρει ελάχιστα από την πραγματικότητα.

Κεφάλαιο 3

Διαφορικες Εξισώσεις και Χαρτογραφία

Η παρούσα ενότητα περιέχει το μαθηματικό μέρος της εργασίας. Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε τη μέθοδο του Euler για την κατασκευή επίπεδων χαρτών. Ο Euler θεμελίωσε το όλο προβλημα σε καθαρά θεωρητική βάση ανάγοντάς το βασικά στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Η μέθοδος του Euler είναι εξαιρετικά γενική και δίδει ουσιαστικά τη δυνατότητα να ορισθούν εκ νέου σχεδόν όλοι οι χάρτες που είχαν ανακαλυφθεί απο γνωστούς Μαθηματικούς και Γεωγράφους.

Ο Euler το 1777 δημοσιεύει τρεις μελέτες στη χαρτογραφία [8], [9], [10] όπου, ενώ θέτει το πρόβλημα της χαρτογραφίας και ξεκινά τη μελέτη του από καθαρά πρακτικούς λόγους, ανακαλύπτει νέες μαθηματικές τεχνικές και εργαλεία που εμπλουτίζουν τα ίδια τα μαθηματικά. Πάνω όμως και από τις νέες μαθηματικές τεχνικές αυτό που είναι απαράμιλλο είναι ο τρόπος που θεμελιώνει και αντιμετωπίζει το πρόβλημα της χαρτογραφίας.

Οι επιμέρους ενότητες του κεφαλαίου είναι οι εξής:

Στην πρώτη ενότητα εξηγούμε τι είναι οι τέλειοι χάρτες και παρουσιάζουμε μια απόδειξη της μη-ύπαρξης τέλειων χαρτών. Η απόδειξη βασίζεται πάνω στις ιδέες του Euler αλλά παρουσιάζεται με σύγχρονους μαθηματκούς όρους ακολουθώντας βασικά το [2]. Με δεδομένο ότι τέλειοι χάρτες δεν υπάρχουν, παρουσιάζονται επίσης οι τρεις βασικές υποθέσεις βάσει των οποίων κατασκευάζονται οι γεωγραφικές προβολές από τη σφαίρα (ή από ένα υποσύνολο της σφαίρας) στο Ευκλείδειο επίπεδο.

Στη δεύτερη ενότητα κατασκευάζουμε γεωγραφικές προβολές που ικανοποιούν την πρώτη υπόθεση η οποία απαιτεί όλες οι παράλληλες να απεικονίζονται σε ευθείες παράλληλες σε ένα σταθερό άξονα ενώ οι μεσημβρινοί να απεικονίζονται σε ευθείες κάθετες στις εικόνες των παραλλήλων. Επιλύοντας διαφορικές εξισώσεις παίρνουμε με αυτή την υπόθεση τον χάρτη του

Μαρίνου του Τύριου.

Στην τρίτη ενότητα βρίσκουμε γεωγραφικές προβολές που ικανοποιούν τη δεύτερη υπόθεση δηλαδή διατηρούν τις γωνίες. Αποδεικνύουμε οτι ο χάρτης του Mercator προέρχεται από μια τέτοια προβολή που διατηρεί τις γωνίες. Εξηγούμε, επίσης, πως με τις διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μεγάλη κλάσση γεωγραφικών προβολών που διατηρούν τις γωνίες.

Στην τέταρτη ενότητα μελετάμε γεωγραφικές προβολές που ικανοποιούν την τρίτη υπόθεση του Euler, δηλαδή προβολές που διατηρούν τα εμβαδά και βρίσκουμε με χρήση διαφορικών εξισώσεων τέτοιες προβολές.

Η πέμπτη ενότητα είναι καθαρά εισαγωγική και με ερευνητικό ενδιαφέρον. Αναφερόμαστε στο πρόβλημα της εύρεσης γεωγραφικών χαρτών που εμφανίζουν την ελάχιστη απόκλιση από την πραγματικότητα ενώ διατηρούν τα εμβαδά. Για το λόγο αυτό εισάγουμε το συντελεστή στρέβλωσης των μησύμμορφων απεικονίσεων και προσπαθούμε να τον συνδέσουμε με τους γεωγραφικούς χάρτες.

3.1 Γιατί δεν υπάρχουν τέλειοι χάρτες

Συμβολίζουμε με E^2 το Ευκλείδειο επίπεδο και με S^2 τη μοναδιαία σφαίρα. Η μετρική πάνω στη μοναδιαία σφαίρα είναι η γωνιώδης μετρική, σύμφωνα με την οποία η απόσταση δύο σημείων $p, q \in S^2$ είναι εξ ορισμού το μήκος του μικρότερου τόξου του μοναδιαίου κύκλου $C \subset S^2$, με $p, q \in C$.

Μία λεία απεικόνιση f (δηλ. η f έχει μερικές παραγώγους κάθε τάξης) από τη σφαίρα S^2 ή από ένα υποσύνολο της σφαίρας στο E^2 θα ονομάζεται *τέλεια αν για κάθε* $p \in S^2$ υπάρχει μια περιοχή $U(p)$ του p στην S^2 έτσι ώστε ο περιορισμός της f στην περιοχή $U(p)$ διατηρεί τα απειροστά μήκη κατά μήκος των μεσημβρινών και των παραλλήλων της S^2, καθώς επίσης και τις ορθές γωνίες μεταξύ των μεσημβρινών και των παραλλήλων.

Μια τοπική ισομετρία $f : X \to Y$ μεταξύ δύο χώρων X και Y με μετρική είναι μια απεικόνιση η οποία διατηρεί τις αποστάσεις τοπικά. Με άλλα λόγια για κάθε $p \in X$ υπάρχει μια περιοχή $U(p)$ του p στον X έτσι ώστε ο περιορισμός της f πάνω στην $U(p)$ διατηρεί τις αποστάσεις.

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε οτι δεν υπάρχουν τέλειες απεικονίσεις από τη σφαιρα S^2 στο επίπεδο E^2. Η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στον Euler ο οποίος ανάγει το πρόβλημα της ύπαρξης μιας τέλειας απεικόνισης στη λύση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Ακολούθως αποδεικνύοντας ότι το σύστημα δεν έχει λύση συνάγεται ότι δεν υπάρχουν τέλειες απεικονίσεις. Η μέθοδος του Euler είναι αρκετά γενική και μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα [2]. Η παρουσίαση της απόδειξης ακολουθεί την απόδειξη του [2] όπου οι ιδέες του Euler καταγράφονται με τη σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

Παρατηρήσεις

(1) Ο ορισμός της τέλειας απεικόνισης υπαρχει στο [8]. Ομως ακόμη και σε αυτό το αρθρο ο ορισμός δεν δίδεται με ρητό τρόπο αλλά ο αναγνώστης πρέπει να διαβάσει προσεκτικά το άρθρο για να τον καταλάβει. Στο ίδιο άρθρο ο Euler αναφέρει ότι είναι γνωστό ότι τέλειες απεικονίσεις δεν υπάρχουν. Η μη-ύπαρξη τέλειων απεικονίσεων ήταν μια κοινή παραδοχή στους μαθηματικούς και γεωγράφους απο την αρχαιότητα αν και δεν υπήρχε καταγεγραμμένος ακριβής ορισμός. Γενικά μια απεικόνιση εθεωρείτο τέλεια αν διατηρεί τα μήκη πάνω στους μεσημβρινούς και τις παραλλήλους, αν διατηρεί το σχήμα και αν διατηρεί τα εμβαδά. Ηταν λοιπόν γνωστό ότι απεικονήσεις που να έχουν και τις τρεις ιδιότητες δεν υπάρχουν και όταν κάποιος κατασκευάζει χάρτες θα έπρεπε να αποφασίσει ποιες από τις τρεις ιδιότητες πρέπει να έχει ο χάρτης (δες [13], Κεφάλαιο 2).

(2) Είναι αξιοσημείωτο ότι μπορεί να αποδειχτεί ότι μια τέλεια απεικόνιση πρέπει να είναι μια ισομετρία. Κατά συνέπεια το Θεώρημα του Euler προκύπτει σαν πόρισμα ενός περίφημου θεωρήματος του Gauss το οποίο έχει μείνει στην ιστορία σαν το ”Υπέροχο Θεώρημα” (“Theorema Egregium”). Το θεώρημα του Gauss λέει ότι οι τοπικές ισομετρίες διατηρούν την καμπυλότητα των επιφανειών. Αρα δεν υπάρχει τοπική ισομετρία από τη σφαίρα στο επίπεδο με δεδομένο ότι η σφαίρα έχει θετική καμπυλότητα +1 ενώ το επίπεδο έχει καμπυλότητα 0. Ομως Gauss γεννήθηκε το 1777 ακριβώς τη χρονιά που ο Euler δημοσίευε το άρθρο του και δημοσίευσε το ”Υπέροχο Θεώρημα” το 1828.

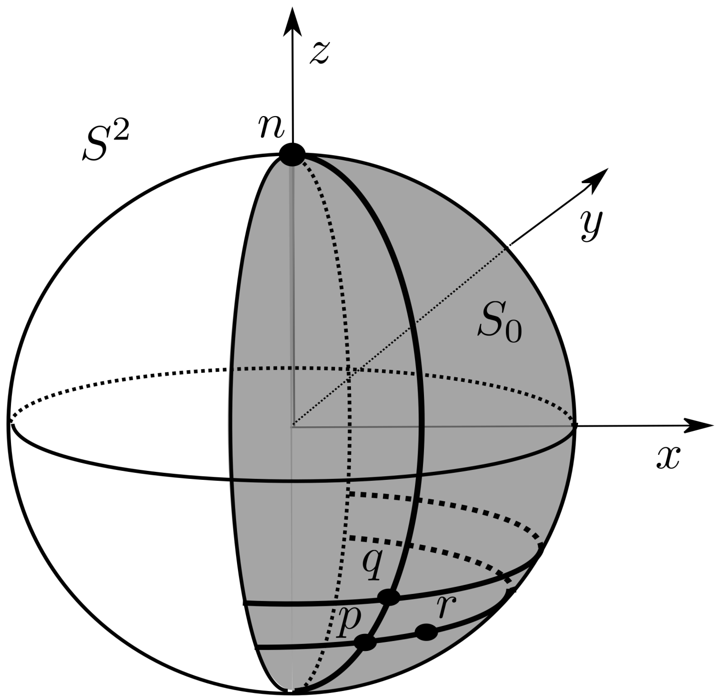
Ακολούθως παρουσιάζουμε την απόδειξη του Euler για μη-ύπαρξη τέλειων απεικονίσεων.

Θεώρημα 3.1.1 *Δεν υπάρχει μια λεια απεικόνιση Φ από μια περιοχή της σφαίρας S^2 σε μια περιοχή του Ευκλείδειου επιπέδου E^2 η οποία είναι τέλεια.*

Proof. Θεωρούμε μια παραμέτριση του ανατολικού ημισφαιρίου S_0 της S^2 που δίδεται από την απεικόνιση:

$$p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S_0 \text{ με } p(t, u) = (\cos(t)\cos(u), \sin(t)\cos(u), \sin(u)).$$

Ετσι οι u-καμπύλες είναι ημικύκλια πάνω στους μεσημβρινούς της S^2 και άρα είναι γεωδαισιάκα τμήματα της S^2 (δηλαδή τμήματα που πραγματοποιούν την απόσταση μεταξύ των σημείων), ενώ οι t-καμπύλες είναι ημικύκλια που βρίσκονται πάνω στις παραλλήλους της S^2 και δεν είναι γεωδαισιακά τμήματα, βλέπε Σχήμα 2 παρακάτω.



Σχήμα 2 : Παραμέτρηση του ανατολικού σφαιρικού ημισφαιρίου

Συμβολίζουμε $|p_1 - p_2|$ την γωνιώδη απόσταση μεταξύ των σημείων $p_1, p_2 \in S^2$ και με $||P_1 - P_2||$ την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων $P_1, P_2 \in E^2$.

Εστω $t, dt, t + dt, u, du, u + du \in (-\pi/2, \pi/2)$, $du \neq 0$, $dt \neq 0$. Τότε, (δες σχήμα 2), θέτουμε

$$p(t,u) = p,\ p(t, u + du) = q,\ p(t + dt, u) = r.$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι οι γωνίες που τέμνονται οι μεσημβρινοί με τις παραλλήλους είναι ορθές.

Για τη συνέχεια έχουμε ανάγκη τους εξής ισχυρισμούς.

Ισχυρισμός 1. Επειδή οι παράλληλοι κύκλοι και οι μεσημβρινοί τέμνονται κάθετα ισχύει ότι

$$\lim_{dt \to 0} \widehat{qpr} = \frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

Ισχυρισμός 2. Ισχύει ότι

$$\frac{|r - p|}{2} = \left|\sin \frac{dt}{2}\right| \cos u.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2.

Τα σημεία p, r ανήκουν σε ένα παράλληλο κύκλο C ακτίνας $\cos u$. Συνεπώς αυτά τα σημεία ορίζουν μια χορδή του C μήκους $2|\sin(dt/2)|\cos u$. Από την άλλη μεριά τα σημεία p, r ανήκουν σε ένα μέγιστο κύκλο γεωδαισιακό κύκλο C_g της S^2 δηλαδή ένα μέγιστο κύκλο της S^2, και άρα η χορδή που ενώνει αυτά τα σημεία έχει μήκος $2\sin(|r-p|/2)$. Αρα η ισότητα έπεται.

Ισχυρισμός 3. Ισχύει ότι

$$\lim_{dt\to 0}\frac{|r-p|}{|dt|}=\cos u. \tag{3.2}$$

Αποδειξη του Ισχυρισμού 3.

Απο τον ισχυρισμό 1 έχουμε ότι

$$\sin\frac{|r-p|}{2}=\left|\sin\frac{dt}{2}\right|\cos u.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\lim_{dt\to 0}\frac{|r-p|}{|dt|} &= \lim_{dt\to 0}\frac{\frac{|r-p|}{2}}{\sin\frac{|r-p|}{2}}\frac{|\sin\frac{dt}{2}|\cos u}{\frac{|dt|}{2}}\\ &= \lim_{w\to 0}\frac{\frac{w}{2}}{\sin\frac{w}{2}}\cdot\lim_{dt\to 0}\frac{|\sin\frac{dt}{2}|}{\frac{|dt|}{2}}\cos u\\ &= \cos u.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Είμαστε τώρα σε θέση συμπληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος.

Υποθέτουμε ότι η Φ είναι μια τέλεια απεικόνιση που ορίζεται σε μια περιοχή του σημείου p και φθάνουμε σε μια αντίφαση.

Θέτουμε

$$\Phi(p(t,u))=P(t,u) \text{ και } P(t,u)=(x(t,u),y(t,u)).$$

Για συντομία θέτουμε

$$P(t,u)=P, P(t,u+du)=Q, P(t+dt,u)=R, x(t,u)=x, y(t,u)=y.$$

Η ύπαρξη της τέλειας απεικόνισης Φ συνεπάγεται ότι

$$\lim_{du\to 0}\frac{|q-p|}{|du|}=\lim_{du\to 0}\frac{||Q-P||}{|du|}, \tag{3.4}$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{|r-p|}{|dt|} = \lim_{dt \to 0} \frac{||R-P||}{|dt|}, \tag{3.5}$$

$$\lim_{dt \to 0} \widehat{qpr} = \lim_{dt \to 0} \widehat{QPR}. \tag{3.6}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\lim_{du \to 0} \frac{|q-p|}{|du|} = 1, \tag{3.7}$$

$$\lim_{du \to 0} \frac{||Q-P||}{|du|} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}, \tag{3.8}$$

$$\lim_{dt \to 0} \frac{||R-P||}{|dt|} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}. \tag{3.9}$$

Από τον ισχυρισμό 3 έχουμε,

$$\lim_{dt \to 0} \frac{|r-p|}{|dt|} = \cos u, \tag{3.10}$$

και από τον ισχυρισμό 1 προκύπτει ότι

$$\lim_{dt \to 0} \cos \widehat{QPR} = 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

(3.11)
$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{dt\to 0}\left|\frac{\langle\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\rangle}{||P-Q||\cdot||P-R||}\right| = \lim_{du\to 0}\lim_{dt\to 0}\left|\frac{\langle\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\rangle}{||P-Q||\cdot||P-R||}\right| \\
&= \lim_{du\to 0}\lim_{dt\to 0}\frac{|\langle(P(t,u+du)-P),(P(t+dt,u)-P)\rangle|}{||P(t,u+du)-P||\cdot||P(t+dt,t)-P||} \\
&= \lim_{du\to 0}\lim_{dt\to 0}\frac{|\langle\frac{(x(t,u+du)-x,y(t,u+du)-y)}{du},\frac{(x(t+dt,u)-x,y(t+dt,u)-y)}{dt}\rangle|}{||\frac{(x(t,u+du)-x,y(t,u+du)-y)}{du}||\cdot||\frac{(x(t+dt,u)-x,y(t+dt,u)-y)}{dt}||} \\
&= \frac{\left|\langle\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u}\right),\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}\right)\rangle\right|}{\left|\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right|\right|\cdot\left|\left|\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right|\right|} \\
&= \frac{\left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}}.
\end{aligned}
$$

όπου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων. Ετσι από (3.4), (3.5), (3.6), λαμβάνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

(3.12)
$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}=1,$$

(3.13)
$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}=\cos u,$$

(3.14)
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}=0.$$

Τώρα από τις σχέσεις (3.12) και (3.13), υπάρχει (ϕ,ω) έτσι ώστε

(3.15)
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u}\right) &= (\cos\phi,\sin\phi), \\
\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}\right) &= (\cos u\cos\omega,\cos u\sin\omega).
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.14), συνάγουμε ότι $\omega = \frac{\pi}{2} + \phi$ ή $\phi = \frac{3\pi}{2} + \phi$. Εάν υποθέσουμε ότι $\omega = \frac{\pi}{2} + \phi$ (η άλλη περίπτωση μελετάται ανάλογα), παίρνουμε ότι

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) = (\cos\phi, \sin\phi), \tag{3.16}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right) = (-\cos u \sin\phi, \cos u \cos\phi). \tag{3.17}$$

Επομένως, επειδή

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial u}$$

Οι σχέσεις (3.16) και (3.17) συνεπάγονται ότι

$$-\sin\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\cos\phi \frac{\partial \phi}{\partial u} \cos u + \sin\phi \sin u, \tag{3.18}$$

$$\cos\phi \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sin\phi \frac{\partial \phi}{\partial u} \cos u - \cos\phi \sin u. \tag{3.19}$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.18) και (3.19) έχουμε ότι

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = 0 \text{ και } \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sin u.$$

Αρα,

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial u} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial t} = -\cos u,$$

το οποίο δίνει μιαν αντίφαση. ■

3.2 Κατασκευή χαρτών που ικανοποιούν την πρώτη υπόθεση του Euler

Η πρώτη και ασθενέστερη υπόθεση του Euler για την κατασκευή επίπεδων χαρτών διατυπώνεται ως εξής:

Οι εικόνες των παραλλήλων είναι ευθείες παράλληλες σε σταθερό άξονα και οι είκονες των μεσημβρινών είναι ευθείες κάθετες στις εικόνες των παραλλήλων.

Στη συνέχεια θα ταυτίσουμε το σταθερό άξονα με τον x-άξονα.

Εστω, όπως προηγούμενα, S_0 είναι το ανατολικό ημισφαίριο το οποίο παραμετρίζουμε με το γεωγραφικό μήκος και πλάτος (t, u) αντίστοιχα μέσω της απεικόνισης $p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S_0$ όπου

$$p(t, u) = (\cos(t)\cos(u), \sin(t)\cos(u), \sin(u)).$$

Εστω $S_0 \to E^2 : (t, u) \to (x(t, u), y(t, u))$ μια γεωγραφική προβολή που ικανοποιεί την παραπάνω υπόθεση του Euler.

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι η συνθήκη της καθετότητος είναι ισοδύναμη με την συνθήκη 3.14. Ισχύουν οι εξής γενικές σχέσεις

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial t}dt \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial t}dt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Θέτοντας $p = \frac{\partial x}{\partial u}$, $q = \frac{\partial x}{\partial t}$, $r = \frac{\partial y}{\partial u}$, $s = \frac{\partial y}{\partial t}$ έχουμε από τις σχέσεις (3.20)

$$\begin{aligned} dx &= pdu + qdt \\ dy &= rdu + sdt. \end{aligned}$$

Αρα η σχέση γίνεται

$$\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}. \tag{3.21}$$

Θέτουμε

$$p = m\cos\phi, r = m\sin\phi \tag{3.22}$$

όπου ϕ είναι η κλίση του διανύσματος (p, r) σχετικά με τον x-άξονα. Αρα

$$\frac{r}{p} = -\frac{q}{s} = \tan\phi. \tag{3.23}$$

Επομένως από (3.23) υπάρχει κάποια συνάρτηση n ώστε να ισχύει

$$q = n\sin\phi,\ s = -n\cos\phi. \tag{3.24}$$

Από υπόθεση, επειδή οι εικόνες των μεσημβρινών είναι κάθετες στον x-άξονα θα είναι $\phi = \pi/2$. Αρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.22) και (3.24), οι σχέσεις (3.21) παίρνουν τη μορφή

$$dx = ndt,\ dy = mdu. \tag{3.25}$$

Θεωρώντας το n σαν συνάρτηση μόνο του t και το m σαν συνάρτηση μόνο του u οι σχέσεις (3.25) είναι ολοκληρώσιμες. Αρα με απλή ολοκλήρωση υπολογίζουμε τις συντεταγμένες $x,\ y$. Για παράδειγμα, αν $n = m = 1$ τότε έχουμε

$$dx = dt, dy = du$$

από όπου παίρνουμε

$$x = t, y = u$$

η οποία είναι η γεωγραφική προβολή του Μαρίνου του Τύριου.

3.3 Σύμμορφες γεωγραφικές προβολές

Σκοπός της ενότητας είναι να βρούμε γεωγραφικές προβολές από τη σφαίρα στο Ευκλείδειο επίπεδο που ικανοποιούν την δεύτερη υπόθεση του Euler η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Οι γεωγραφικες προβολές διατηρούν τις ιδιότητες της ομοιότητος των μικρών σχημάτων.

Με σύγχρονους μαθηματικούς όρους ψάχνουμε απεικονίσεις από τη σφαίρα στο Ευκλείδειο επίπεδο που διατηρούν τις γωνίες. Αυτές οι απεικονίσεις λέγονται σύμμορφες.

Εστω λοιπόν $S_0 \to E^2 : \Phi(t, u) = (x(t, u), y(t, u))$ μια σύμμορφη απεικόνιση. Από την προηγούμενη παράγραφο, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.22) και (3.24), οι σχέσεις (3.21), παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} dx &= m\cos\phi du + n\sin\phi dt \\ dy &= m\sin\phi du - n\cos\phi dt \end{aligned}$$

Επίσης, επειδή η Φ είναι σύμμορφη οι εξής συνθήκες ομοιότητος ικανοποιούνται,

$$\frac{\lim_{|du|\to 0}||P-Q||/du}{\lim_{|dt|\to 0}||P-R||/dt} = \frac{\lim_{|du|\to 0}|p-q|/du}{\lim_{|dt|\to 0}|p-r|/dt}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{p^2+r^2}}{\sqrt{q^2+s^2}} = \frac{1}{\cos u} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{\cos u}.$$

Αρα οι σχέσεις (3.26) γίνονται

$$\begin{aligned} dx &= m\cos\phi du + m\sin\phi\cos u dt \\ dy &= m\sin\phi du - m\cos\phi\cos u dt \end{aligned} \tag{3.26}$$

και θέτοντας ξανά $p = m\cos\phi$, $r = m\sin\phi$, έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} dx &= pdu + r\cos u dt \\ dy &= rdu - p\cos u dt, \end{aligned}$$

και η εύρεση σύμμορφων απεικονίσεων ανάγεται στην εύρεση συναρτήσεων $p(t,u), r(t,u)$ ώστε οι εξισώσεις (3.27) να είναι ολοκληρώσιμες.

3.3α′ Ο Χάρτης του Mercator

Θέτοντας στη σχέση (3.27) $p = 0$, $r = 1/\cos u$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= \tfrac{du}{\cos u} \end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα (3.27) με απλή ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \int \frac{du}{\cos u}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος εργαζόμαστε ως εξής:

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{du}{\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}} = \int \frac{du}{1-\tan^2\frac{u}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

Θέτοντας

$$z = \tan\frac{u}{2} \Rightarrow \frac{dz}{du} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}} \Rightarrow 2dz = \frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}} \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = 2\int \frac{1}{1-z^2}dx = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \ln\frac{1+\tan\frac{u}{2}}{1-\tan\frac{u}{2}} = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right).$$

Αρα τελικά έχουμε τους τύπους που δίνουν τις συντεταγμένες $x(t,u), y(t,u)$:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

3.3β′ Εύρεση άλλων σύμμορφων προβολών

Εκτός απο την προβολή του Mercator η οποία δίδεται σαν μια ειδική και απλή λύση του συστήματος (3.27) των διαφορικών εξισώσεων, το γενικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.27) έχει και άλλες λύσεις οι οποίες όμως δεν είναι εύκολο, όπως ο ίδιος ο Euler γράφει, να βρεθούν. Στο [8] ο Euler παρουσιάζει διάφορες μεθόδους και λύσεις του συστήματος (3.27). Η πρώτη μέθοδος την οποία θα σχολιάσουμε παρακάτω είναι στοιχειώδης όσον αφορά τις τεχνικές αλλά όχι εύκολη. Ουσιαστικά ανάγει τη λύση των διαφορικών εξισώσεων (3.27) σε ολοκλήρωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Η μέθοδός του, η οποία είναι πλέον κεντρική στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους συνίσταται στο να υποθέσει κανείς ότι οι συναρτήσεις p και r που εμφανίζονται στις σχέσεις (3.27) είναι γινόμενο συναρτήσεων όπου κάθε συνάρτηση του γινομένου είναι συνάρτηση μόνο ως προς t ή μόνο ως προς u.

Εκτός όμως από την παραπάνω μέθοδο ο Euler παρουσιάζει μια γενική μέθοδο λύσης των διαφορικών εξισώσεων (3.27). Οι μετασχηματισμοί που πραγματοποιεί σε αυτή τη γενική μέθοδο ώστε να μπορέσει να μετασχηματίσει και ολοκληρώσει τις σχέσεις (3.27) είναι εκπληκτικοί. Ισχυρίζεται ότι με αυτή τη μέθοδο κατασκευάζει κάθε σύμμορφη απεικόνιση από τη σφαίρα στο επίπεδο. Μεταξύ των άλλων κατασκευάζει ”azimuthal” (αζιμούθιους) χάρτες, δηλαδή χάρτες που οι παράλληλες απεικονίζονται σε ομόκεντρους κύκλους και οι μεσημβρινοί σε ακτίνες που ξεκινούν από το κοινό κέντρο των ομόκεντρων κύκλων. Επίσης παραδέχεται ότι πολλές από τις λύσεις που βρίσκει δεν έχουν καμμιά πρακτική χρήση στην χαρτογραφία.

Παρακάτω θα περιγράψουμε τη μέθοδο του ”χωρισμού μεταβλητών” όπως την εισάγει και την χρησιμοποιεί ο Euler και θα περιγράψουμε επίσης πως ο Euler ανάγει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.27) σε ενα απλούστερο. Πιο συγκεκριμένα θέτουμε

$$p = UT \text{ και } r = V\Theta$$

όπου U, V είναι συναρτήσεις μόνο του u και T, Θ είναι συναρτήσεις μόνο του t. Αρα οι (3.27) γίνονται

$$\begin{aligned} dx &= UTdu + V\Theta \cos u dt \\ dy &= V\Theta du - UT \cos u dt \end{aligned} \tag{3.28}$$

Από αυτό είναι δυνατόν μέσω ολοκληρωμάτων να βρούμε μια διπλή έκφραση των x και y. Εάν το t το θεωρήσουμε σταθερό τότε ο δεύτερος προσθεταίος μηδενίζεται και άρα έχουμε

$$\begin{aligned} x &= T\int U du \\ y &= \Theta \int V du. \end{aligned}$$

Παρόμοια, αν θεωρήσουμε το u σταθερό τότε ο πρώτος προσθεταίος μηδενίζεται και άρα έχουμε

$$\begin{aligned} x &= V \cos u \int \Theta dt \\ y &= -U \cos u \int T dt \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\begin{aligned} T\int U du &= V \cos u \textstyle\int \Theta dt \\ \Theta \int V du &= -U \cos u \textstyle\int T dt. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Η ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{\displaystyle\int U du}{V \cos u} &= \frac{\displaystyle\int \Theta dt}{T} \\ \frac{\displaystyle\int V du}{U \cos u} &= -\frac{\displaystyle\int T dt}{\Theta}. \end{aligned}$$

Από τις (3.30) μπορούμε να υπολογίσουμε τα U, V, T, Θ, διότι η πρώτη από τις σχέσεις (3.30) συνεπάγεται ότι

$$\frac{\int U du}{V \cos u} = \frac{\int \Theta dt}{T} = a$$

και η δεύτερη από τις σχέσεις (3.30) συνεπάγεται ότι

$$\frac{\int V du}{U \cos u} = -\frac{\int T dt}{\Theta} = b$$

όπου a, b είναι σταθερές. Πιό αναλυτικά, αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι στις σχέσεις (3.30) οι πρώτοι όροι των ισοτήτων είναι συναρτήσεις μόνο του u ενώ οι δεύτεροι όροι των ισοτήτων συναρτήσεις μόνο του t.

3.4 Γεωγραφικές προβολές που διατηρούν τα εμβαδά

Σε αυτή την παράγραφο ψάχνουμε για γεωγραφικές προβολές που ικανοποιούν την τρίτη υπόθεση του Euler η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Οι προβολές διατηρούν τα εμβαδά και επίσης οι μεσημβρινοί και οι παράλληλες προβάλλονται σε καμπύλες οι οποίες τέμνονται κάθετα στον E^2.

Εστω $f : S_0 \to E^2$ μια λεία, ομαλή απεικόνιση με $f(t,u) = (x(t,u), y(t,u))$, δηλαδή, $(\partial x/\partial t, \partial y/\partial t) \neq (0,0)$ και $(\partial x/\partial u, \partial y/\partial u) \neq (0,0)$.

Εάν $p = (t,u)$, $q = (t, u+du)$, $r = (t+dt, u)$ σημεία στο S_0 θέτουμε $P = f(t,u), Q = f(t, u+du), R = f(t+dt, u)$.

Σκοπός μας είναι να ανάγουμε ξανά το πρόβλημα ευρέσεως της f σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Ξεκινάμε λοιπόν με τους γενικούς τύπους

$$\begin{aligned} dx &= pdu + qdt, \quad dy = rdu + sdt \\ p &= \frac{\partial x}{\partial u},\ q = \frac{\partial x}{\partial t},\ r = \frac{\partial y}{\partial u},\ s = \frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Οπως έχουμε ήδη αποδείξει επειδή η καθετότητα των μεσημβρινών και των παραλλήλων διατηρείται, έχουμε

$$-\frac{s}{q} = \frac{p}{r} = n \tag{3.30}$$

για κάποια συνάρτηση n την οποία μπορούμε να υποθέσουμε θετική, [8], [14].

Αρα, $s = -np, q = nr$ και επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} dx &= pdu + nrdt, \\ dy &= rdu - npdt \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στην παράγραφο 3.1 έχουμε αποδείξει ότι

$$\lim_{du \to 0} \frac{|q-p|}{|du|} = 1,$$

$$\lim_{dt\to 0} \frac{|r-p|}{|dt|} = \cos u,$$

$$\lim_{du\to 0} \frac{||Q-P||}{|du|} = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2} = \sqrt{p^2+r^2},$$

$$\lim_{dt\to 0} \frac{||R-P||}{|dt|} = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial t})^2 + (\frac{\partial y}{\partial t})^2} = n\sqrt{p^2+r^2}.$$

και επειδή η f διατηρεί τα εμβαδά θα έχουμε

$$n\left(p^2+r^2\right)|du||dt| = \cos u|du||dt|$$

από όπου

$$n = \frac{\cos u}{p^2+r^2}. \tag{3.31}$$

Επομένως από τις σχέσεις (3.31) και (3.31) έχουμε

$$dx = pdu + \frac{r\cos u}{p^2+r^2}dt,\ \ dy = rdu - \frac{p\cos u}{p^2+r^2}dt \tag{3.32}$$

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς θέτουμε $p = m\cos\phi$ και $r = m\sin\phi$, όπου $m = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2} > 0$, άρα έχουμε

$$dx = m\cos\phi du + \frac{\cos u\sin\phi}{m}dt,\ \ dy = m\sin\phi du - \frac{\cos u\cos\phi}{m}dt.$$

Επιπλέον, θέτουμε $m = k\cos u$ άρα $k > 0$ και έχουμε

$$dx = k\cos u\cos\phi du + \frac{\sin\phi}{k}dt,\ \ dy = k\cos u\sin\phi du - \frac{\cos\phi}{k}dt. \tag{3.33}$$

Μπορούμε άμεσα να επαληθεύσουμε ότι μια λύση των παραπάνω εξισώσεων επιτυγχάνεται θέτοντας $k = 1$, $\phi = \pi/2$, δηλαδή,

$$x(t,u) = t,\ y(t,u) = \sin u.$$

Τέλος θέτοντας $k = a, \phi = \varphi_0$, όπου a, φ_0 είναι αυθαίρετες σταθερές, ο τύπος

$$x(t,u) = a\sin u\cos\varphi_0 + \frac{t\sin\varphi_0}{a},\ y\left(t,u\right) = a\sin u\sin\varphi_0 - \frac{t\cos\varphi_0}{a}.$$

ορίζει μια γενικότερη λύση της (3.32). Αυτή η λύση στην ουσία διαφέρει από τις προηγούμενες μόνο στο γεγονός ότι οι μεσημβρινοί δεν είναι πλέον κάθετοι στον x -άξονα. Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε το εξής.

Λήμμα 3.4.1 *Εάν η συνάρτηση k είναι σταθερή στη σχέση (3.32) τότε η γωνία ϕ πρέπει να είναι σταθερή.*

Proof. Υποθέτουμε ότι $k(t, u) = a$ μια σταθερά και θα δείξουμε ότι η $\phi(t, u)$ είναι επίσης σταθερή συνάρτηση.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= a \cos u \cos \phi \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\sin \phi}{a} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= a \cos u \sin \phi \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\cos \phi}{a} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial t} \quad &\Rightarrow \quad -a \cos u \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\cos \phi}{a} \frac{\partial \phi}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial t} \quad &\Rightarrow \quad a \cos u \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sin \phi}{a} \frac{\partial \phi}{\partial u} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Επομένως,

$$-\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \Longrightarrow -\sin^2 \phi = \cos^2 \phi \Rightarrow \phi \text{ σταθερή.}$$

■

Για να βρούμε άλλες λύσεις του συστήματος (3.33) θέτουμε $v = \cos u$, και έχουμε το εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} dx &= k \cos \phi dv + \frac{\sin \phi}{k} dt, \\ dy &= k \sin \phi dv - \frac{\cos \phi}{k} dt. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το k είναι συνάρτηση μόνο του v και ισούται με V και το ϕ είναι συνάρτηση μόνο του t και ισούται με T. Τότε οι σχέσεις (3.36) γίνονται

$$
\begin{aligned}
dx &= V\cos T dv + \frac{\sin T}{V}dt \\
dy &= V\sin T dv - \frac{\cos T}{V}dt
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

από όπου με ολοκλήρωση έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
x &= \cos T\int V dv &= \frac{1}{V}\int \sin T dt \\
y &= \sin T\int V dv &= -\frac{1}{V}\int \cos T dt.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε

$$
\begin{aligned}
V\int V dv &= \frac{\int \sin T dt}{\cos T} &= a \\
-V\int V dv &= \frac{\int \cos T dt}{\sin T} &= -b.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Από τις δύο εκφράσεις του V έπεται ότι $a = b$ και με παραγώγιση έχουμε

$$V dv = -\frac{adV}{V^2} \Rightarrow dv = -\frac{adV}{V^3}$$

και ακολούθως με ολοκλήρωση

$$v + c = \frac{a}{V^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{a}{2(v+c)}}.$$

Επίσης για τη συνάρτηση T έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \sin T dt &= a\cos T \\
-\int \cos T dt &= a\sin T
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

και με παραγώγιση

$$dT = -\frac{dt}{a} \Rightarrow T = -\frac{t}{a}.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω τιμή της V παίρνουμε

$$\int V dv = \sqrt{2a(v+c)}$$

και άρα

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2a(v+c)}\cos\frac{t}{a} \\ y &= -\sqrt{2a(v+c)}\sin\frac{t}{a} \end{aligned} \tag{3.40}$$

από όπου έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= -\tan\frac{t}{a} \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{2a(v+c)}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Από τους τελευταίους τύπους έπεται ότι οι παράλληλες απεικονίζονται μέσω της γεωγραφικής προβολής σε ομόκεντρους κύκλους και οι μεσημβρινοί σε ακτίνες που ξεκινάνε από το κοινό κέντρο των ομόκεντρων κύκλων.

3.5 Το πρόβλημα της απόκλισης των γεωγραφικών χαρτών από την πραγματικότητα

Στη δεύτερη παράγραφο δείξαμε με βάση τη μέθοδο του Euler ότι δεν υπάρχουν τέλειοι χάρτες. Ακολούθως είδαμε πως ο Euler βάζοντας κάποιες υποθέσεις κατασκευάζει γεωγραφικές προβολές που τις ικανοποιούν. Με δεδομένο λοιπόν ότι δεν υπάρχουν τέλειοι χάρτες ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι να βρεθούν οι ”καλύτεροι” χάρτες, δηλαδή χάρτες που παρουσιάζουν τη μικρότερη απόκλιση από την πραγματικότητα. Στο πέρασμα των χρόνων αποδείχθηκε ότι το παραπάνω ερώτημα είχε μια μεγάλη δυναμική και γέννησε τη θεωρία των σχεδόν-σύμμορφων απεικονίσεων η οποία επηρέασε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και διαμόρφωσε νέους.

Ο ίδιος ο Euler [8] αλλά και ο Lagrange [17] και ο Lambert [16] γνωρίζοντας ότι υπάρχουν άπειρες γεωγραφικές προβολές που διατηρούν τις γωνίες μελέτησαν το πρόβλημα της εύρεσης της προβολής που έχει τη μικρότερη απόκλιση από την πραγματικότητα. Ο Lagrange αναφέρεται στη δουλειά του Lambert και στη συνέχεια εισάγει ένα συντελεστή παραμόρφωσης με βάση τον οποίο ψάχνει να βρει την "καλύτερη" απεικόνιση. Ο Euler μελετά το όλο πρόβλημα με δικές του μεθόδους διαφορετικές από αυτές των Lagrange και Lambert. Ο Chebyshev (1821-1894) [3], [4] μελέτησε το πρόβλημα της εύρεσης της "καλύτερης" απεικόνισης ακολουθώντας τις ιδέες του Lagrange τον οποίο θαύμαζε και μελετούσε ό,τι αυτός έγραφε. Τέλος ο Milnor [19] ασχολήθηκε με τη χαρτογραφία και συγκεκριμένα το πρόβλημα της "καλύτερης" προβολής. Ετσι, μελέτησε τις εργασίες του Chebyshev και ξαναααπέδειξε τις εργασίες του χρησιμοποιώντας σύγχρονη μαθηματική γλώσσα και παρατηρώντας ότι οι δουλειές του Chebyshev παρέμειναν αχρησιμοποίητες από τους χαρτογράφους για πάνω από εκατό χρόνια.

Ολοι οι παραπάνω μαθηματικοί ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της "καλύτερης" προβολής μένοντας μέσα στην κλάση των σύμμορφων απεικονίσεων. Πρώτος ο Tissot (1824–1897) θεώρησε και μελέτησε το πρόβλημα της καλύτερης προβολής μέσα στο χώρο των μη-σύμμορφων απεικονίσεων. Ο Tissot δημοσίευσε κατ' αρχάς τις εργασίες του στο Comptes Rendus [24], [25], [26], [27] και πολλές από τις επόμενες εργασίες του αναπαράγονται στο μακροσκελές άρθρο [28]. Παρακάτω θα προσπαθήσουμε αδρά να περιγράψουμε τις βασικές ιδέες του Tissot.

Εστω U ένας τόπος του R^2 δηλαδή ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2. Εστω επίσης $f : U \to f(U) \subset R^2$ μια απεικόνιση της μορφής $f(t,u) = (x(t,u), y(t,u))$ και υποθέτουμε ότι η f είναι $1-1$ και όλες οι μερικές παράγωγοι των $x(t,u), y(t,u)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις, δηλαδή η f είναι της κλάσης C^1. Σε ένα σημείο $(t,u) \in U$ θεωρούμε τον 2×2 πίνακα

$$Df(t,u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t,u) & \frac{\partial x}{\partial u}(t,u) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t,u) & \frac{\partial y}{\partial u}(t,u) \end{pmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος και δρά στα διανύσματα του R^2 με σημείο εφαρμογής το σημείο (t,u) και τα στέλνει σε διανύσματα του R^2 με σημείο εφαρμογής το σημείο $(x,y) = f(t,u)$. Συμβολίζουμε με $T_{(t,u)}R^2$ (αντ. $T_{(x_0,y_0)}R^2$) τα διανύσματα με σημείο εφαρμογής το (t,u) (αντ. (x,y)). Αυτοί οι χώροι θα αναφέρονται σαν εφαπτόμενοι χώροι στα σημεία (t,u) και (x,y) αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι η f διατηρεί τον προσανατολισμό και τις γωνίες αν και μόνον αν ισχύουν οι εξής συνθήκες που ονομάζονται συνθήκες των Cauchy-Riemann:

(3.42)
$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t}(t,u) &= \frac{\partial y}{\partial u}(t,u) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t,u) &= -\frac{\partial x}{\partial u}(t,u). \end{aligned}$$

Αν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann τότε εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι κύκλοι στον $T_{(t,u)}R^2$ (δηλαδή όλα τα διανύσματα με ίσο μήκος) στέλνονται σε κύκλους του $T_{(x,y)}R^2$ μέσω του πίνακα $Df(t,u)$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε τον μοναδαίο κύκλο στον $T_{(t,u)}R^2$ τότε αυτός απεικονίζεται σε έναν κύκλο ακτίνας ρ. Το μέγεθος ρ μετράει πόσο διαφέρει μια σύμμορφη απεικόνιση από του να είναι ισομετρία καθόσον οι ισομετρίες διατηρούν τα μήκη των κύκλων.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η f δεν είναι σύμμορφη και άρα δεν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann. Τότε ένας κύκλος του $T_{(t,u)}R^2$ απεικονίζεται εν γένει σε μια έλλειψη του $T_{(x,y)}R^2$ μέσω του πίνακα $Df(t,u)$. Αν a είναι το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης και b το μήκος μικρού άξονα τότε ο λόγος $a/b > 1$ ορίζεται σαν παραμόρφωση της f στο σημείο (t,u) και μετράει την απόκλιση της f από του να είναι σύμμορφη απεικόνιση. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε το λόγο a/b στο σημείο (t,u) με $A_f(t,u)$. Ο υπολογισμός του $A_f(t,u)$ εν γένει δεν είναι εύκολος, αλλά όταν η f είναι της κλάσης C^1 και εισαγάγοντας μιγαδικό συμβολισμό ο όρος $A_f(t,u)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας έχουμε τους εξής τύπους ([11], p. 2):

(3.43)
$$A_f(t,u) = \frac{|(f_t - if_u)| \,+\, |(f_t + if_u)|}{|(f_t - if_u)| \,-\, |(f_t + if_u)|}$$

όπου

$$\begin{aligned} f_t &= \frac{\partial x}{\partial t} + i\frac{\partial y}{\partial t} \\ f_u &= \frac{\partial x}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial u}. \end{aligned}$$

Ακολούθως, αν $f_0(t,u) = (t, \sin u)$ είναι η κυλινδρική προβολή του Lambert που διατηρεί τα εμβαδά, θα υπολογίσουμε τη στρέβλωση $A_{f_0}(t,u)$.

Κατ' αρχάς με βάση τους τύπους (3.43) και (3.44) έχουμε ότι

(3.44)
$$\begin{aligned} f_t &= \frac{\partial x}{\partial t} + i\frac{\partial y}{\partial t} = 1 \\ f_u &= \frac{\partial x}{\partial u} + i\frac{\partial y}{\partial u} = \cos u \end{aligned}$$

άρα

$$A_f(t,u) = \frac{|1+\cos u| \ + \ |1-\cos u|}{|1+\cos u| \ - \ |1-\cos u|} = \frac{1}{\cos u}.$$

Από την άλλη μεριά αν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$p : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S_0$ με $p(t,u) = (\cos(t)\cos(u), \sin(t)\cos(u), \sin(u))$.

ο 3×2 πίνακας

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\cos(t)\cos(u) & \frac{\partial}{\partial u}\cos(t)\cos(u) \\ \frac{\partial}{\partial t}\sin(t)\cos(u) & \frac{\partial}{\partial u}\sin(t)\cos(u) \\ \frac{\partial}{\partial t}\sin(u) & \frac{\partial}{\partial u}\sin(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t)\cos(u) & -\cos(t)\sin(u) \\ \cos(t)\cos(u) & \sin(t)\sin(u) \\ 0 & \cos u \end{pmatrix}$$

στέλνει το διάνυσμα $e_1 = (1,0)$ στο διάνυσμα

$$r_1 = (-\sin(t)\cos(u), \cos(t)\cos(u), 0)$$

και το $e_2 = (0,1)$ στο

$$r_2 = (-\cos(t)\sin(u), \sin(t)\sin(u), \cos u).$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \langle r_1, r_2 \rangle &= 0 \\ |r_1| &= \cos u \\ |r_2| &= 1 \end{aligned}$$

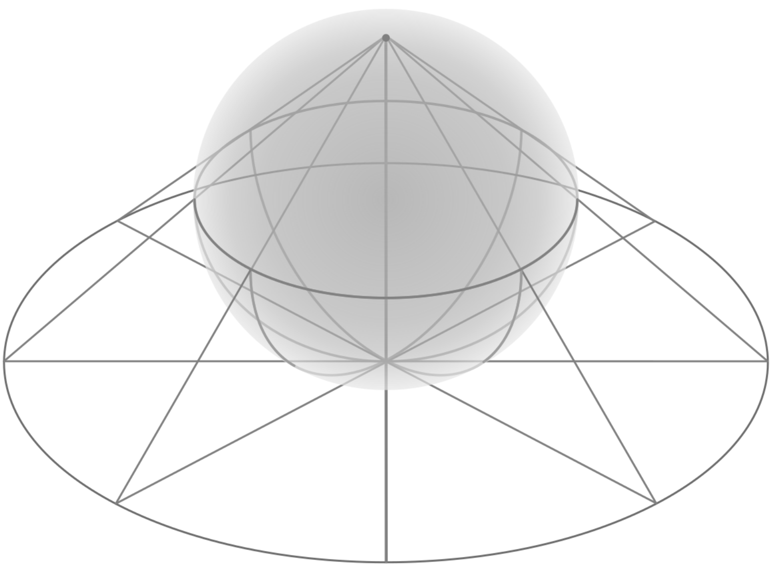
δηλαδή τα r_1, r_2 είναι κάθετα μεταξύ τους με μήκη αντίστοιχα $\cos u$ και 1. Αρα η στρέβλωση $A_p(t,u)$ της απεικόνισης p στο σημείο (t,u) είναι $|r_2|/|r_1| = 1/\cos u$. Επομένως μπορούμε να δείξουμε ότι η στρέβλωση της γεωγραφικής προβολής $f_0(t,u) = (t, \sin u)$ στο σημείο της σφαίρας με γεωγραφικές συντεταγμένες (t,u) ισούται με $A_p(t,u) \cdot A_{f_0}(t,u) = 1/\cos^2 u$, (βλέπε Εικόνα 10).

Τελειώνοντας θα θέσουμε ένα πρόβλημα η απάντηση του οποίου έχει και ερευνητικό ενδιαφέρον.

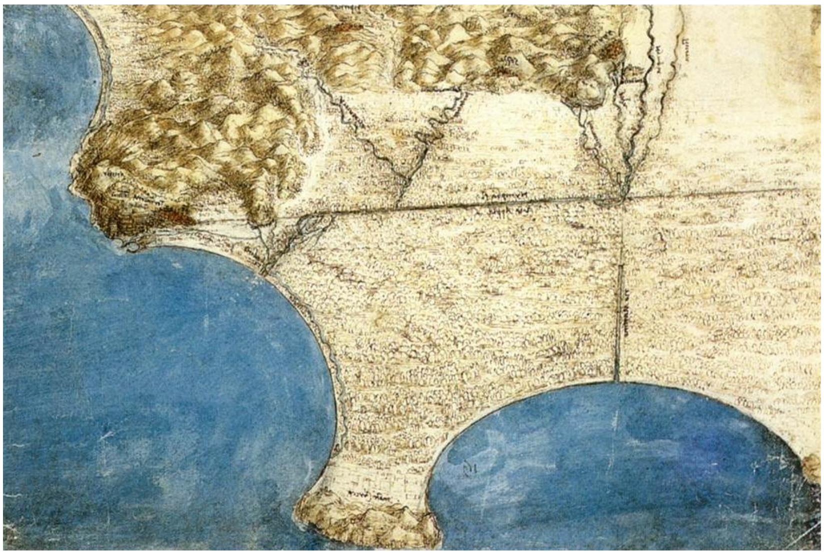
Πρόβλημα Χρησιμοποιώντας τους τύπους 3.33 μπορούμε να υπολογίσουμε τη στρέβλωση όλων των γεωγραφικών προβολών της ενότητας 5 που διατηρούν τα εμβαδά. Φαίνεται λοιπόν πιθανόν να μπορούμε να εκτιμήσουμε τη στρέβλωση όλων αυτών των προβολών και να την φράξουμε από τη στρέβλωση της προβολής f_0 του Lambert.

Κεφάλαιο 4

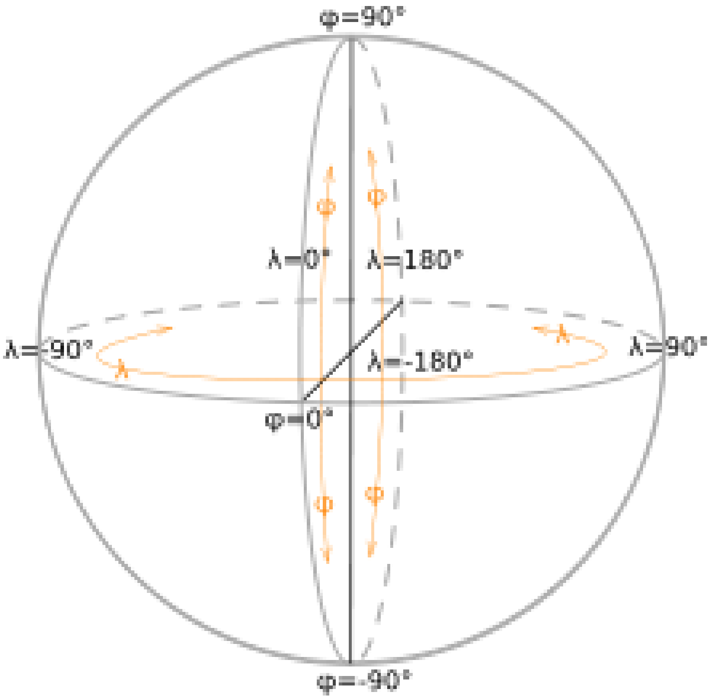
Εκόνες Χαρτών και Σχήματα



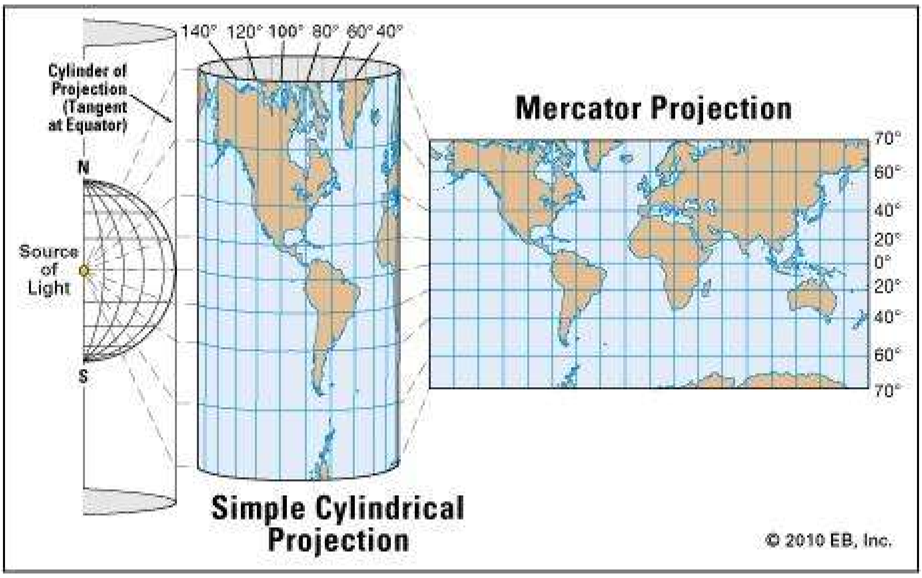
Εικόνα 1 : Στερεογραφική προβολή



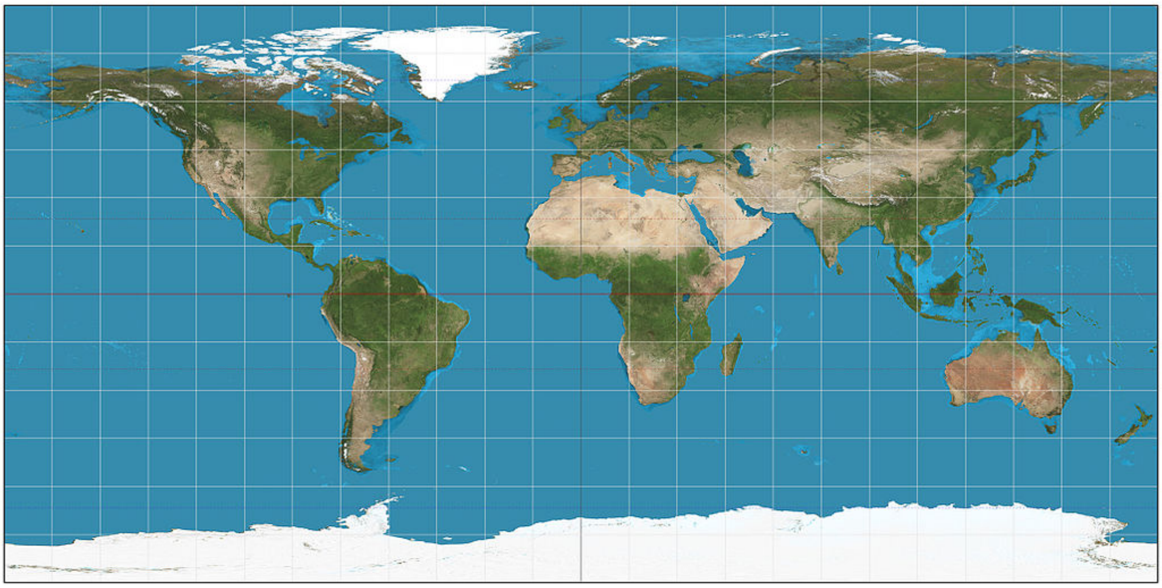
Εικόνα 2 : LEONARDO da Vinci Bird's-eye-view of sea coast Pen, ink, watercolour on paper, 272 x 400 mm Royal Library, Windsor



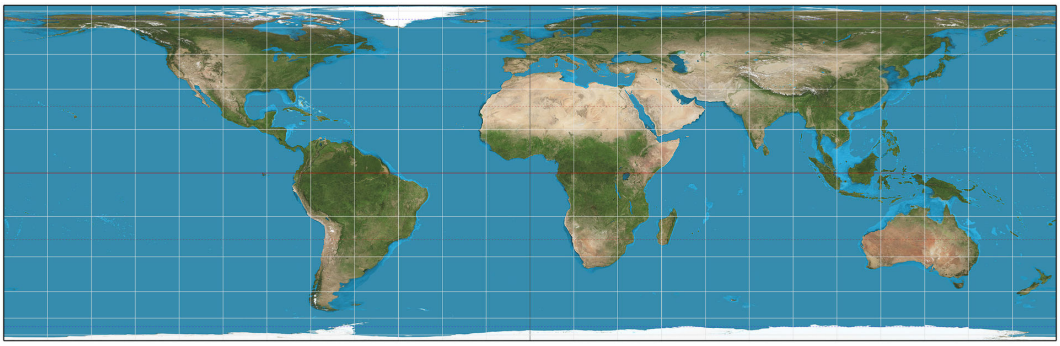
Εικόνα 3 : Οι γεωγραφικές συντεταγμένες στην σφαίρα



Εικόνα 4 : Κυλινδρική προβολή



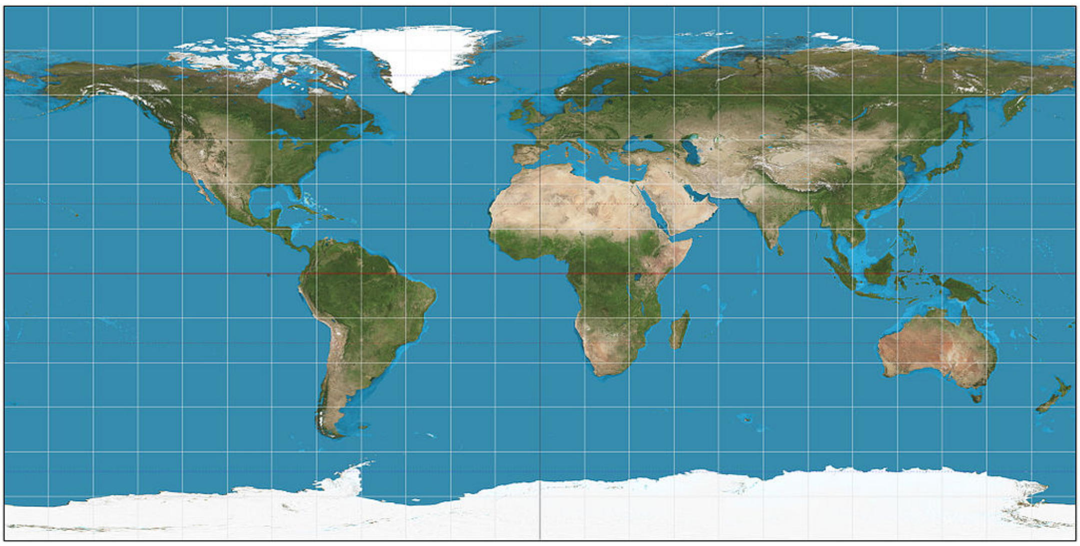
Εικόνα 5 : Ο χάρτης του Μαρίνου του Τύριου



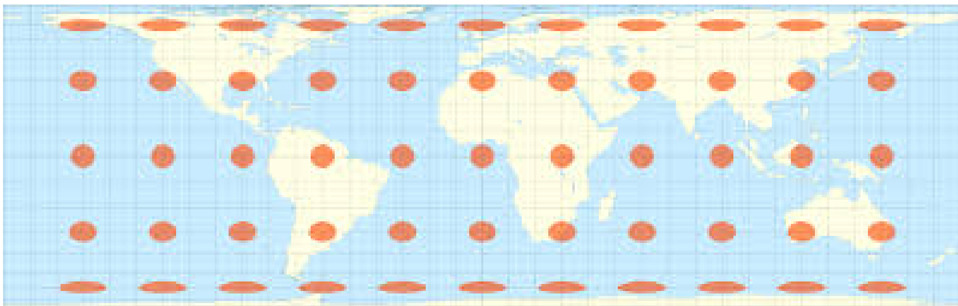
Εικόνα 6 : Ο χάρτης του Lambert που διατηρεί τα εμβαδά

Εικόνα 7 : Ο χάρτης του Πτολεμαίου που βασίζεται στην πρώτη κωνική προβολή

Εικόνα 8 : Ο χάρτης του Πτολεμαίου που βασίζεται στην δεύτερη κωνική προβολή



Εικόνα 9 : Ο χάρτης του Mercator



Εικόνα 10 : Η παραμόρφωση του Tissot στον χάρτη του Lambert

Βιβλιογραφία

[1] Calinger R. S. (2016). *Leonhard Euler Mathematical Genius in the Enlightenment*. Princeton University Press, New Jersey, U.S.A.

[2] C. Charitos and I. Papadoperakis, *On a theorem of Euler on mappings from the sphere to the plane*. Essays in non-Euclidean geometry, ed. A. Papadopoulos, E.M.S. Zurich, 2017.

[3] P. L. Chebyshev, *Oeuvres*, edited by A. Marko and N. Sonin, Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, Saint-Petersburg, 2 volumes, 1899-1907.

[4] P. L. Chebyshev, *Sur la construction des cartes géographiques*. Discours prononcée le 8 février 1856 dans la séance solennelle de l'Université Impériale de Saint-Petersbourg (traduit par A. Gravé). Reprinted in P. L. Tchebycheff , Oeuvres [[3]], Vol. 1, p. 239-247, Reprint, Chelsea, NY.

[5] Crampton J.W. (2010). Mapping. *A critical introduction to cartography and GIS*. Wiley-Blackwell, Singapore.

[6] Dunham W. (1999). Euler: The Master of Us All. The Mathematical Association of America. U.S.A.

[7] Leonhard Euler, *Principles de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits*, Mémoires de l' Académie des sciences de Berlin 9, (1753), 1755, p. 233-257; Opera omnia, Series 1, Vol. XXVII, p. 277-308.

[8] Leonhard Euler, *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 1777, 1778, pp. 107-132 Opera Omnia: Series 1, Volume 28, pp. 248-275.

[9] L. Euler, *De proiectione geographica superficiei sphaericae*, Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 1777, 1778, pp. 133-142, Opera Omnia Series 1, Volume 28, pp. 276-287.

[10] L. Euler, *De proiectione geographica Deslisliana in mappa generali imperii russici usitata*, Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae 1777, 1778, pp. 143-153, Opera Omnia Series 1, Volume 28.

[11] A. Fletcher, V. Markovic, *Quasiconformal Maps and Teichmüller Theory*, Oxford Mathematics, 2007.

[12] C. F. Gauss, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebnen Fläche aufeiner andern gegebnen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten den kleinsten Theilen ähnlich wird*, Astronom. Abh. (Schumacher ed.), 3 (1825),1-30. Also in Gauss's Werke, vol. IV, 189-216.

[13] R. Gabler, J. Petersen, L. M. Trapasso, *Essentials of Physical Geography*, Brooks/Cole; 7th edition , 2003.

[14] Leonard Euler (translation by G. Heine), *On the mapping of Spherical Surfaces onto the Plane*, http://eulerarchive.maa.org/docs/translations/E490en.pdf..

[15] Johann Heinrich Lambert, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, part III, section 6: Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten, 1772, translated as, Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps in [23].

[16] J. H. Lambert, *Beitrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, 4 vol., im Verlage des Buchladens der Realschule, Berlin, 1765 -1772.

[17] J. L. de Lagrange, *Sur la construction des cartes geographiques*, Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1779, Premier mémoire, Oeuvres complètes, tome 4, 637-664. Second mémoire Oeuvres complètes, tome 4, 664-692.

[18] Λιβιεράτος Ευαγ. (1998). *Χαρτογραφίας και Χαρτών Περιήγησις*. Εθνική Χαρτοθήκη.

[19] J. Milnor, *A problem in cartography*, The American Mathematical Monthly Vol. 76, No. 10 (Dec. 1969), 1101-1112.

[20] Νάκος, Βυρ., (2015). *Αναλυτική χαρτογραφία*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο στο: http://hdl.handle.net/11419/2233

[21] A. Papadopoulos, *Quasiconformal mappings, from Ptolemy's geography to the work of Teichmüller*, arXiv:1702.03756.

[22] Raisz E. (1948). General Cartography. New York: McGraw-Hill Book Company.

[23] John P. Snyder, Map Projections – A Working Manual, USGS Professional Paper 1395, 1987, pp. 76–85.

[24] A. Tissot, *Sur les cartes géographiques*, C. R. Acad. Sci. (Paris), 49 (1859), 673 - 676.

[25] A. Tissot, *Sur les cartes géographiques*, C. R. Acad. Sci. (Paris), 50 (1860), 474 - 476.

[26] A. Tissot, *Sur les cartes géographiques*, C. R. Acad. Sci. (Paris), 50 (1860), 964 - 968.

[27] A. Tissot, *Sur la construction des cartes géographiques*, C. R. Acad. Sci. (Paris), 60 (1865), 933-934.

[28] A. Tissot, *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1881, 337 p.

[29] Χαλκιάς Χρ. (2011). *Συστήματα Γεωγραφικών Πληροφοριών*, Σημειώσεις. Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο, Τμήμα Γεωγραφίας.